

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN
TE AMSTERDAM

PROCEEDINGS

VOLUME XXXIX

No. 1

President: J. VAN DER HOEVE

Secretary: B. BROUWER

CONTENTS

- BÖESEKEN, J. and J. STUURMAN: "On the ring tension of cyclenes", p. 2.
- KEESOM, W. H. and Miss A. P. KEESOM: "Measurements concerning the specific heat of solid helium and the melting heat of helium", p. 9.
- CORPUT, J. G. VAN DER: "Verteilungsfunktionen". (Dritte Mitteilung), p. 10.
- CORPUT, J. G. VAN DER: "Verteilungsfunktionen". (Vierte Mitteilung), p. 19.
- SCHOUTEN, J. A. und J. HAANTJES: "Ueber allgemeine konforme Geometrie in projektiver Behandlung". II, p. 27.
- BÖESEKEN, J.: "Valency-shifting in cyclanes", p. 28.
- BÖESEKEN, J. and E. DE ROY VAN ZUYDEWIJN: "Tautomerism of butadiene sulphone", p. 31.
- ARIËNS KAPPERS, C. U.: "The character and spread of associated cephalic and cranial index peaks in Africa", p. 32. (With two tables).
- HAMADA, T.: "Determination of the temperature in the column of a discharge from the intensity-measurement of rotational band spectra". (Communicated by Prof. L. S. ORNSTEIN), p. 50.
- MAHLER, KURT: "Ueber Pseudobewertungen Ia". (Zerlegungssätze). (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT), p. 57.
- TRAUTH, FRIEDRICH: "Ueber Aptychenfunde auf Cuba". (Communicated by Prof. L. RUTTEN), p. 66.
- FLORSCHÜTZ, F. and I. M. VAN DER VLERK: "The pleistocene human skull from Hengelo". I. Geological-palaeontological part. (Communicated by Prof. J. BOEKE), p. 76.
- BROEK, A. J. P. VAN DEN: "The pleistocene human skull from Hengelo". II. Anthropological part. (Communicated by Prof. J. BOEKE), p. 81. (With one plate).
- BURSCHE, F. C.: "The pleistocene human skull from Hengelo". III. Archaeological part. (Communicated by Prof. J. BOEKE), p. 83. (With one plate).
- GORTER, A.: "Ueber die Nikotinbildung bei Nicotiana nach der Fütterung mit Prolin". (Communicated by Prof. J. C. SCHOUTE), p. 87.
- MEESTERS, A.: "The influence of hetero-auxin on the growth of root hairs and roots of *Agrostemma Gythago* L.". (Communicated by Prof. J. C. SCHOUTE), p. 91.
- RIESE, W.: "Ueber die Entwicklung des Walhirns". (Communicated by Prof. C. U. ARIËNS KAPPERS), p. 97.

- DIEMER, J. H. and P. H. VAN THIEL: "Remarks with regard to the "Courte instruction pour la détermination des variétés d'*Anopheles maculipennis*" by the Malaria Committee of the League of Nations". (Communicated by Prof. J. VAN DER HOEVE), p. 110.
- HUREWICZ, W.: "Beiträge zur Topologie der Deformationen". III. Klassen und Homologietypen von Abbildungen. (Communicated by Prof. L. E. J. BROUWER), p. 117.
- DANTZIG, D. VAN: „Electromagnetism, independent of metrical geometry. V. Quantum-theoretical commutability-relations for light-waves". (Communicated by Prof. J. A. SCHOUTEN), p. 126.
- HEYN, A. N. J.: "X ray investigations on the molecular structure of Chitin in cell walls". (Preliminary note). (Communicated by Prof. G. VAN ITERSON JR.), p. 132.

Chemistry. — *On the ring tension of cyclenes.* By J. BÖESEKEN and J. STUURMAN.

(Communicated at the meeting of December 21, 1935).

In the preceding article one of us (B) has pointed out that by means of steric researches indications may be obtained concerning the occurrence of peculiar conditions in ring systems but not whether these are the result of or are connected with ring tensions.

These indications have now been obtained by a kinetic investigation, viz. of the oxidation of unsaturated hydrocarbons with per-acetic acid.

Originally this investigation was executed in order to determine the effect of substitution in the double bond on the velocity of oxidation, since it had appeared from provisional experiments that this effect was very great¹).

By determination of this velocity at various temperatures a deeper insight could be obtained into the energy conditions concerned here.

Cyclenes comparable with the alkenes were included in the investigation, since it was to be expected that by so doing it could be found whether ring tension exists in the ring-shaped molecules or whether it does not.

For by making use of the well-known equation

$$\ln K = -\frac{E}{RT} + B \text{ or } \log K = -\frac{E}{2.303 RT} + B^1 \text{ resp.,}$$

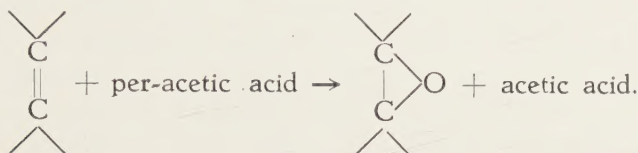
it may be ascertained whether the differences in comparable alkenes are caused by variations of the activation energies, E , by those of the magnitudes B , or finally by changes of both.

In the light of F. E. C. SCHEFFER's speculations²) E is the difference between the energy of the molecules in the "intermediate stage" and the average energy of those molecules. In our case this consequently means the energy required to make the alkenes react upon the per-acetic acid.

¹) Recueil des tr. ch. des P. B. 54, 657 (1935).

²) Proc. Kon. Akad. 19, 878; 21, 1134, 1143 (1910—1913), 25, 592 (1916), F. E. C. SCHEFFER and W. F. BRANDSMA, Recueil 45, 522 (1926).

If a more tangible representation is desired, it might be called the energy required to open one of the linkages of the double bond, to transfer the active oxygen of the per-acetic acid to the alkene, and to prepare the formation of the alkene oxide. By previous researches it had appeared, namely, that this reaction should be represented by the simple equation:



Since E refers to the whole reaction and in the intermediate stage the formed products are in a kind of initial stage, the energy conditions of the formed products have to be taken into consideration as well; in the first place those of the formed oxide.

Although the molecules are energetically able to react, the velocity depends in the second place on a complex of other factors, which is defined by the B -value.

The comparatively simple representation that the reaction will set in when the molecules, represented as spherical, touch in special reactive places, calculated by BRANDSMA and tested by a special reaction, has not yielded satisfactory results.¹⁾

Indeed this was not expected, since the molecules are not spherical and in the B -values, in addition to the ordinary steric factors, also other conditions are hidden. We mention the probability of formation of the products, here consequently of the oxides.

We may now consider the result of the measurements.

These were carried out in acetic-acid solution at $25^{\circ}8$ and, apart from some exceptions, at 39° . Some also at a lower temperature; this showed that the binomial equation of ARRHENIUS was admissible.

From the measurements at two temperatures the values E and B have been calculated.

Hydrocarbon	$K_{25.8} \times 10^3$	E	B	
ethene	0.19			
propene	4.2			
pentene — 1	4.3	17600	10.5	
hexene — 1	4.9	17400	10.4	
$C_6H_5CH_2CH:CH_2$. .	1.94	18000	10.5	

¹⁾ W. F. BRANDSMA, Reactie-snelheden. Thesis Delft 1925 and Recueil 47, 94 (1927).

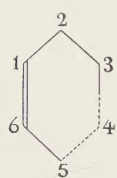
as. dimethylethene . . .	92	15600	10.4	
pentene — 2	94	15600	10.4	
hexene — 2	99	15300	10.2	
hexene — 3	129	15500	10.4	
$C_6H_5 - CH : CHCH_3$.	46	15900	10.3	
$(C_6H_5)_2C : CH_2$. . .	48	16200	10.6	
$C_6H_5CH : CHC_6H_5$. .	5.1	16000	9.4	
trimethylethene . . .	980	14000	10.3	
triphenylethene . . .	5.8	15100	8.8	
styrene	11.2	13900	8.3	} exceptional values
cyclohexene	129	15600	10.4	
cyclopentene	195	14000	9.6	
cyclobutene	20.4	13800	8.4	
indene	47	15600	10.1	
1.2 dihydronaphtalene .	240	12700	8.7	
1.4 dihydronaphtalene .	37	18200	11.9	
methylcyclopentene . .	2220	13550	10.6	

1. Comparing the constants of the alkenes, we notice that every introduction of an alkyl group to the double bond causes a very considerable increase of K : the tetramethylethene was so rapidly oxidized that at $25^\circ 8$ no constant could be determined.

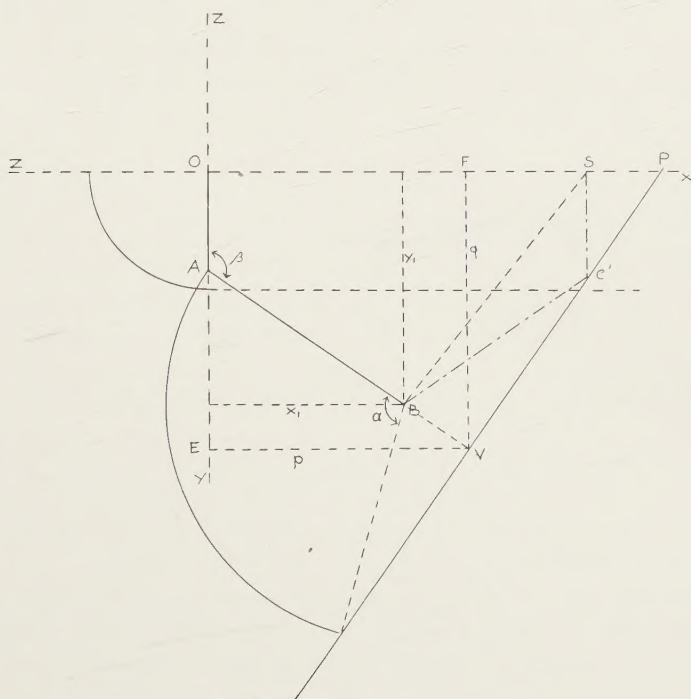
2. If we introduce phenyl groups, the constant becomes considerably smaller, except in the case of styrene. With one phenyl (or benzyl) group it is reduced to about one half; the same reduction is found with two phenyl groups if they are bound to the same C-atom. With two phenyl groups, on either side of the double bond, and even more with three phenyl groups the decrease of the constant is still more striking.

Considering how these differences are reflected in the E - and B -values, we see that in the true aliphatic alkenes the increase of the velocity of reaction is almost entirely due to the decrease of the E -values: in connection of our former remarks, therefore, a continually diminishing amount of energy is required to transfer the double bond to the alkene oxide by means of per-acetic acid; the B -values remain practically constant.

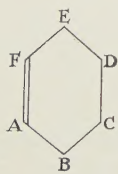
This now is a very favourable circumstance, for it enables us to compare the cyclenes with the disubstituted alkenes.



It appeared that *cyclohexene* is completely comparable with hexene-3, i.e. that the cyclic hydrocarbon behaves as if no ring closure had taken place: particularly the equal *E*-value is an indication that a possible ring tension is not observed. If a steric analysis is made of this hydrocarbon from the wellknown distances of the C-atoms, there will be no tension if C-atoms 3 is assumed to lie as far above the plane of the C-atoms 1, 2, 6 and 5 as C-atom 4 below it.



When inquiring into the possibility of a tensionless structure of cyclohexene, we may make use of the already known distances between the double-bound and that between the single-bound carbon atoms; we shall call these distances $2a$ and $2b$ respectively. The valency angle also on the single-bound C-atom, is known, the tetrahedral angle ($109^{\circ}28'$). However, we do not know with certainty the valency angle on the double bound C-atom (β); generally it is assumed to be $125^{\circ}16' = (360 - 109^{\circ}28') : 2$. If the centres of the atoms are called A, B, C, D, E, and F (see figure),



it may be assumed that the points E, F, A, and B are situated in one plane, owing to the double bond. If also the points D and C were situated in this plane, the distance DC would be far too small, as appears from the calculation with the data mentioned above. These points, therefore, must deviate from the plane until their distance amounts to $2b$. This may take

place in two ways, viz. either by the two points lying above the plane or by one point deviating above the plane and the other below it. In the first case the angles D and C are much too large (about 120°); we should, therefore, start from the second possibility.

Now we may proceed to the actual calculation. For this purpose the idealized molecule is placed (see figure) in a system of 3 axes. The origin O lies half-way between A and F (half the molecule is sufficient), the X-axis lies along AF, the X-axis in the plane OAB. From the angle β , the distance $OA = a$ and $AB = 2b$ the coordinates of point B are known ($x, y, 2b \sin \beta$ and $a - 2b \cos \beta$ resp.). Of point C is known in the first place that, owing to the X-axis being of binary symmetry, it lies on the cylinder with OZ for axis and a radius b . Secondly that it lies on the sphere, centre B, radius $2b$, and thirdly through the tetrahedral angle, in the plane through $V \perp AB$ ($AV = \frac{8}{3} b$).

Indicating the three coordinates of C as x, y, z , we may consequently apply the following equations:

$$y^2 + z^2 = b^2$$

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 + z^2 = r^2$$

$$\frac{x}{d} + \frac{y(d-p)}{qd} = 1, \text{ where } p = VE, q = VF, \text{ and } d = OP.$$

Since $d-p = -q \cot \beta$, there follows for x by calculation:

$$x = a \tan \beta + \sqrt{a^2 \sec^2 \beta - \frac{16}{3} a b \sec \beta + \frac{29}{3} b^2}.$$

C'S is the projection of the half side CD, the triangle C'SB the projection of $\triangle CSB$, and $\angle C$ of this triangle the angle we want to find and which has to be equal to the tetrahedral angle, $109^\circ 28'$. If this angle is called τ ,

then $\cos \tau = \frac{BC^2 + CS^2 - BS^2}{2 BC \cdot CS}$ or, if $BS = s$ and since $BC = 2b$ and $CS = b$,

$$\cos \tau = \frac{5b^2 - s^2}{4b^2}.$$

Now $s^2 = (x-x_1)^2 + y_1^2$; this yields after calculation:

$$\cos \tau = \frac{-2a^2 \sec^2 \beta + \frac{28}{3} ab \sec \beta - \frac{26}{3} b^2 - (2a \tan \beta - 4b \sin \beta) \sqrt{a^2 \sec^2 \beta - \frac{16}{3} ab \sec \beta + \frac{29}{3} b^2}}{4b^2}.$$

If now the known values for a and b are filled in, it may be found how large the angle τ will be for various values of β .

For $\beta = 125^\circ 16'$ we find $\tau = 112^\circ 40'$, which angle differs very little from the tetrahedral angle. Cyclohexene, therefore, will be practically tension-free.

Seen in this light, cyclohexene is the simplest example of an asymmetric hydrocarbon: splitting up in the optical isomers, however, will not be possible, since, owing to the very absence of tension, a transition of the two antipodes will take place too easily.

Comparison of *cyclopentene* with *pentene-2* shows a very strong decrease of E ; it falls from 15600 to 14000. The ring closure makes the double bond energetically more accessible to per-acetic acid.

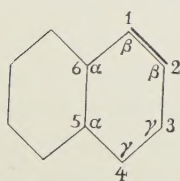
This same phenomenon is observed in a still higher degree by comparison of *cyclobutene* with *dimethylethene* and also in *methylcyclopentene* in comparison with *trimethylethene*.

Although the significance of the *value* of these differences is thus far not to be comprehended, yet the fact of this energetic difference cannot be understood otherwise than as a result of *tension*. This must be caused by the deviation of the valencies, necessary in case of ring closure, which at the closure of the four-ring *must* be greater than at that of the five-ring. We emphatically draw the attention to the fact that the amount of the decrease of the E -values is not a measure of the ring tension because also energy differences of the forming alkene oxides are hidden in it.

In the case of cyclobutene, in comparison with the aliphatic alkenes, something else becomes apparent, viz. a strong decrease of the B -value. This means that the number of collisions taking a favourable course is smaller. It is, of course, not justified to give an explanation of this phenomenon without its being supported by a number of analogous cases. It may be due to a divergence of the unsaturated C-atoms, which causes the formation of the oxide to become less probable. A decrease of the reactive surface is hardly likely here.

Indene may be compared on the one hand with propenyl benzene, on the other hand, but far less satisfactorily, with cyclopentene. With respect to the first case we notice a slight decrease of E . Consequently it is a little more active, which is compensated by a diminishing of B . We see, therefore, a change which in a way may be compared with that from *pentene-2* to *cyclopentene*, but in a smaller measure.

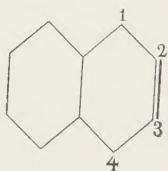
The two dihydronapthalenes are highly interesting. In the 1—2 isomer we find a very small E and also a fairly small B -value.



If we analyse this molecule sterically, supposing the angles α , β and γ to be $= 120^\circ$, 125° and 109° respectively and the distances $1.2 = 1.3 \text{ \AA}$, 2.3 , 3.4 , and $4.5 = 1.5 \text{ \AA}$, $5.6 = 1.4 \text{ \AA}$, while finally the C-atoms 1 and 4 lie in the plane of the benzene ring, it appears that this molecule has a highly distorted structure and

it is, therefore, comprehensible that the double bond is easily attacked by per-acetic acid (small E) and that the position of the C -atoms 1 and 2 is not particularly favourable for the formation of an oxide (small B).

On the other hand it appears that the 1,4 dihydronaphthalene on steric analysis, if it is assumed that the C -atoms 2 and 3 lie on the same side



of the plane of the benzene ring (the aliphatic ring supposed to be in bed position), needs hardly any deviation of the affinities, whereas opening of the double bond and transition into the saturated condition make deviation necessary. This is indicated by the high energy-threshold. The uncommonly high B -value is striking; for

the present, owing to the complex nature of this magnitude, the significance of this phenomenon remains a secret. It may be that the probability of formation of the oxide, owing to the equilibrrious system, is exceptionally great here.

Finally we wish to draw the attention to the phenylated ethenes.

	E	B
$C_6H_5CH:CH_2$	13900	8.3
$C_6H_5CH_2CH:CH_2$. .	18000	10.5
hexene - 1	17400	10.4
$C_6H_5CH:CHCH_3$. . .	15900	10.3
hexene - 2	15300	10.2
$(C_6H_5)_2C:CH_2$	16200	10.6
$(CH_3)_2C:CH_2$	15600	10.4
$C_6H_5CH:CHC_6H_5$. .	16000	9.4
hexene - 3	15500	10.4
$C_6H_5)_2C:CHC_6H_5$. .	15100	8.8
trimethylethene	14000	10.3

Styrene, as compared with the other mono-substituted ethenes, has a small E -value. Probably this has something to do with the conjugation of the double bond and the phenyl nucleus, which also becomes manifest in the too high refraction and in the easy polymerization. The significance of the very low B -value we can not yet comprehend for the same reason as mentioned above. A direct steric impediment by one single phenyl group is hardly probable. In stilbene and triphenylethene this steric influence might be sooner expected and consequently the smaller B -values 9.4 and 8.8 might

very well be due to this influence. The comparatively high E -values, which (with the exception of styrene) are found in all phenylated ethenes are clearly perceptible in the annexed table. The phenyl groups slightly reduce the activity of the double bond towards per-acetic acid.

Delft, December 1935.

Laboratory of Organic Chemistry
of the Technical University.

Physics. — *Measurements concerning the specific heat of solid helium and the melting heat of helium.* By W. H. KEESOM and Miss A. P. KEESOM. (Abstract of Communication N^o. 240b from the KAMERLINGH ONNES Laboratory at Leiden).

(Communicated at the meeting of December 21, 1935).

The specific heat at constant volume of solid helium for densities from 0.20 to 0.22 g/cm³ and from 1.2 to 3.0° K. were measured. The curves c_v *vers* T increase more rapidly than corresponds with DEBIJE's formula. The θ_D *vers* T -curves appear to be approximately straight lines. In the investigated region θ_D changes between 37 ($T=1.2$, $\rho=0.218$) and 25 ($T=2.18$, $\rho=0.201$).

The calorimetric experiments gave the possibility to observe for a given density the temperature at which solid helium begins to melt as well as that at which melting is finished or liquid helium begins to solidify. Of these data we mention:

T	2.2	3.0	4.0	° K.
density of solid helium melting	0.202	0.216	0.230 (extrap.)	g/cm ³
„ „ liquid helium solidifying	0.188 ⁵	0.203	0.217 ⁵	„

For the melting heat the following values were derived:

T	2.5	3.0	3.5	° K.
melting heat	0.835	1.089	1.365	cal/g.

Further some specific heats of liquid helium under pressures up to 135 atm were measured.

Mathematics. — Verteilungsfunktionen. Von J. G. VAN DER CORPUT.
(Dritte Mitteilung).

(Communicated at the meeting of December 21, 1935).

Notwendige Bedingungen.

Den in der Einleitung¹⁾ (S. 814) formulierten, und in der vorigen Mitteilung (S. 1058) bewiesenen Satz 5, der eine notwendige und hinreichende Bedingung liefert, damit eine vorgegebene aus monoton-nichtabnehmenden Funktionen $\equiv 0$ und $\equiv 1$ bestehende Funktionenmenge die Menge der Verteilungsfunktionen einer geeignet gewählten, aus untereinander verschiedenen Zahlen bestehenden Zahlenfolge sei, wende ich in dieser Mitteilung an, um den in der Einleitung (S. 817) genannten Satz 9 zu beweisen. Ausserdem leite ich die Sätze 10 und 11 der Einleitung (S. 818) her, die nicht notwendige und hinreichende, sondern nur notwendige Bedingungen liefern.

Beweis von Satz 9.

Erster Schritt: Definition einer Funktionenfolge Ω . Jedem ganzen $k > 0$ ordne ich ein System

$$\Gamma_k: -\infty = \gamma_0 < \gamma_1 < \dots < \gamma_t < \gamma_{t+1} = \infty$$

mit

$$\gamma_2 < -k; \quad \gamma_{t-2} > k; \quad \gamma_{\tau+1} - \gamma_\tau < \frac{1}{k} \quad (\tau = 1, 2, \dots, t-1) \quad (33)$$

zu, das alle etwaigen Punkte γ mit $\varphi(\gamma+) - \varphi(\gamma-) > \frac{1}{k}$ und auch alle etwaigen Punkte γ mit $\phi(\gamma+) - \phi(\gamma-) > \frac{1}{k}$ enthält; für jedes $k \equiv 2$ sei Γ_{k-1} ein Teilsystem von Γ_k .

Jeder monoton-nichtabnehmenden Funktion $\psi(\gamma)$ mit $\varphi(\gamma) \leq \psi(\gamma) \leq \phi(\gamma)$ ordne ich ferner folgendermassen ein Zahlensystem (B_1, \dots, B_t) zu. Enthält das offene Intervall $(\gamma_{\tau-1}, \gamma_{\tau+1})$ ($\tau = 1, \dots, t$) mindestens ein γ mit $\psi(\gamma+) - \psi(\gamma-) > \frac{1}{k}$, so sei η_τ die in diesem offenen Intervall liegende Zahl mit möglichst grossem Sprung $\psi(\gamma+) - \psi(\gamma-)$ und dabei sei η_τ die möglichst weit rechts liegende Zahl mit dieser Eigenschaft;

¹⁾ These Proc. 38, N^o. 8, Erste Mitteilung, S. 813—821; N^o. 10, Zweite Mitteilung, S. 1058—1066.

sonst sei $\eta_\tau = \gamma_\tau$. Es werde nun die ganze Zahl kB_τ ($\tau = 1, 2, \dots, t$) durch die „Hauptungleichung“

$$\mu(\varphi(\gamma_\tau), \phi(\gamma_\tau), \psi(\eta_\tau)) \equiv B_\tau < \mu(\varphi(\gamma_\tau), \phi(\gamma_\tau), \psi(\eta_\tau)) + \frac{1}{k} \quad (34)$$

eindeutig festgelegt; hierin ist

$$\begin{aligned} \mu(u, v, w) &= u, \text{ falls } v \leq u \leq w, \text{ und auch falls } w \leq u \leq v, \\ &= v, \quad „ \quad w \leq v \leq u, \quad „ \quad „ \quad „ \quad u \leq v \leq w, \\ &= w, \quad „ \quad u \leq w \leq v, \quad „ \quad „ \quad „ \quad v \leq w \leq u. \end{aligned}$$

Man hat $\eta_\tau \leq \eta_{\tau+1}$; denn sonst hätte man $\gamma_\tau < \eta_{\tau+1} < \eta_\tau < \gamma_{\tau+1}$, und dann wäre sowohl η_τ als auch $\eta_{\tau+1}$ der im offenen Intervall $(\gamma_\tau, \gamma_{\tau+1})$ möglichst weit rechts liegende Punkt γ mit möglichst grossem $\psi(\gamma+) - \psi(\gamma-)$, und das kann nicht sein. Wegen der Monotonie der Funktionen φ, ϕ, ψ und wegen $\gamma_\tau < \gamma_{\tau+1}$ und $\eta_\tau \leq \eta_{\tau+1}$ folgt aus der Hauptungleichung

$$B_\tau \leq B_{\tau+1} \quad (\tau = 1, 2, \dots, t).$$

Die Funktion $\chi(\gamma)$, die in den Punkten γ_τ ($1 \leq \tau \leq t$) den Wert B_τ besitzt, im Intervall $\gamma \leq \gamma_1$ und auch im Intervall $\gamma \geq \gamma_t$ konstant und in den abgeschlossenen Intervallen $(\gamma_\tau, \gamma_{\tau+1})$ ($1 \leq \tau \leq t-1$) linear ist, ist stetig, monoton-nichtabnehmend, ≥ 0 und ≤ 1 . Die Funktion $\chi(\gamma)$ ist durch das System (B_1, \dots, B_t) , also bei gegebenem k durch die monoton-nichtabnehmende Funktion $\psi(\gamma)$ mit $\varphi(\gamma) \leq \psi(\gamma) \leq \phi(\gamma)$ eindeutig bestimmt; ich nenne $\chi(\gamma)$ die der Funktion $\psi(\gamma)$ und der Zahl k zugeordnete Funktion. Die Zahlen kB_1, \dots, kB_t sind ganz, ≥ 0 und $\leq k$, so dass bei gegebenem k die Anzahl der verschiedenen Systeme (B_1, \dots, B_t) , also auch die Anzahl der verschiedenen Funktionen $\chi(\gamma)$ beschränkt ist. Ich kann also alle verschiedenen Funktionen $\chi(\gamma)$ in eine Folge

$$\Omega: \quad \omega_1(\gamma), \omega_2(\gamma), \dots$$

anordnen. Jede monoton-nichtabnehmende Funktion $\psi(\gamma)$ mit $\varphi(\gamma) \leq \psi(\gamma) \leq \phi(\gamma)$ und jedes ganze $k > 0$ haben dann die Eigenschaft, dass die zugeordnete Funktion $\chi(\gamma)$ in Ω vorkommt, und umgekehrt entsprechen jedem ganzen $n > 0$ ein (mit n unbeschränkt wachsendes) k und eine monoton-nichtabnehmende Funktion $\psi(\gamma)$ mit $\varphi(\gamma) \leq \psi(\gamma) \leq \phi(\gamma)$, so dass $\omega_n(\gamma)$ diesem k und dieser Funktion $\psi(\gamma)$ zugeordnet ist.

Jede zu Ω gehörige Funktion ist monoton-nichtabnehmend, stetig, ≥ 0 und ≤ 1 .

Zweiter Schritt: Jede Grenzfunktion von Ω hat in jedem Punkt ζ einen Wert $\geq \varphi(\zeta)$ und $\leq \phi(\zeta)$.

Beweis: Ich wähle n so gross, dass $-k < \zeta < k$ ist. Wegen $\gamma_2 < -k$ und $\gamma_{t-1} > k$ ist $\gamma_2 < \zeta < \gamma_{t-1}$, so dass γ einem Intervall $\gamma_\tau \leq \zeta < \gamma_{\tau+1}$ mit $2 \leq \tau \leq t-2$ angehört.

Ich unterscheide zwei verschiedene Fälle:

1. Bei geeignet gewähltem K kommt ζ in Γ_K vor. Bei hinreichend groszem n ist dann $k \geq K$, und ζ kommt auch in Γ_k vor. Dann ist $\zeta = \gamma_\tau$ und $\omega_n(\zeta) = \chi(\zeta) = B_\tau$, also wegen der Hauptungleichung (34)

$$\varphi(\zeta) \equiv \omega_n(\zeta) < \phi(\zeta) + \frac{1}{k},$$

woraus folgt

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \omega_n(\zeta) \equiv \varphi(\zeta) \text{ und } \limsup_{n \rightarrow \infty} \omega_n(\zeta) \equiv \phi(\zeta) \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

2. Der Punkt ζ kommt in keinem der Systeme $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ vor. Man hat einerseits

$$\begin{aligned} \omega_n(\zeta) &\equiv \omega_n(\gamma_{\tau+1}) = \chi(\gamma_{\tau+1}) \\ &\equiv \mu(\varphi(\gamma_{\tau+1}), \phi(\gamma_{\tau+1}), \psi(\eta_{\tau+1})) + \frac{1}{k} \text{ wegen (34)} \\ &\equiv \phi(\gamma_{\tau+1}) + \frac{1}{k} \end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} \omega_n(\zeta) &\equiv \omega_n(\gamma_\tau) = \chi(\gamma_\tau) \\ &\equiv \mu(\varphi(\gamma_\tau), \phi(\gamma_\tau), \psi(\eta_\tau)) \text{ wegen (34)} \\ &\equiv \varphi(\gamma_\tau), \end{aligned}$$

also

$$\varphi(\gamma_\tau) \equiv \omega_n(\zeta) < \phi(\gamma_{\tau+1}) + \frac{1}{k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

Die Funktionen $\varphi(\gamma)$ und $\phi(\gamma)$ sind in ζ stetig, da sonst ζ in wenigstens einem der Systeme $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ auftreten würde. Wegen $\gamma_\tau < \zeta < \gamma_{\tau+1}$ und $\gamma_{\tau+1} - \gamma_\tau < \frac{1}{k}$ streben γ_τ und $\gamma_{\tau+1}$ nach ζ , so dass (35) aus (36) folgt.

Dritter Schritt: Jede monoton-nichtabnehmende Funktion $\psi(\gamma)$ mit $\varphi(\gamma) \equiv \psi(\gamma) \equiv \phi(\gamma)$ ist eine Grenzfunktion der Folge Ω .

Beweis: Ich werde für jedes ζ beweisen:

$$\chi(\zeta) \rightarrow \psi(\zeta) \quad \text{für } k \rightarrow \infty; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

hierin ist $\chi(\zeta)$ die (in der Folge Ω vorkommende) Funktion, die der Zahl k und der Funktion $\psi(\gamma)$ zugeordnet ist. Ich wähle k so grosz, dass $-k < \zeta < k$, also bei geeignet gewähltem τ ($2 \leq \tau \leq t-1$) $\gamma_\tau \leq \zeta < \gamma_{\tau+1}$ ist und unterscheide zwei verschiedene Fälle.

1. Der Punkt ζ kommt in wenigstens einem der Systeme $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ vor. Für hinreichend groszes k kommt dann ζ in Γ_k vor, so dass $\zeta = \gamma_\tau$ ist.

1.1. Die Funktion $\psi(\gamma)$ sei in ζ unstetig. Für hinreichend großes k ist im offenen Intervall $\left(\gamma_\tau - \frac{1}{k}, \gamma_\tau + \frac{1}{k}\right)$, also gewisz im offenen Intervall $(\gamma_{\tau-1}, \gamma_{\tau+1})$ für jedes $\gamma \neq \zeta$

$$\psi(\gamma+) - \psi(\gamma-) < \psi(\zeta+) - \psi(\zeta-), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

Mit Rücksicht auf die im ersten Schritt gegebene Definition ist dann $\eta_\tau = \gamma_\tau = \zeta$, so dasz die Hauptungleichung (34) hier wegen $\varphi(\gamma) \equiv \psi(\gamma) \equiv \phi(\gamma)$ in

$$\psi(\zeta) \leq \chi(\zeta) < \psi(\zeta) + \frac{1}{k}$$

übergeht; hieraus folgt (37).

1.2. Die Funktion $\psi(\gamma)$ sei in ζ stetig. Wird ε beliebig positiv gewählt, so ist bei hinreichend groszem k

$$\psi(\zeta) - \varepsilon < \psi(\gamma) < \psi(\zeta) + \varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

im offenen Intervall $\left(\zeta - \frac{1}{k}, \zeta + \frac{1}{k}\right)$, also auch im offenen Intervall $(\gamma_{\tau-1}, \gamma_{\tau+1})$, so dasz

$$\psi(\zeta) - \varepsilon < \psi(\eta_\tau) < \psi(\zeta) + \varepsilon$$

ist. Die Hauptungleichung (34) verwandelt sich jetzt in

$$\psi(\zeta) - \varepsilon < \chi(\zeta) < \psi(\zeta) + \varepsilon + \frac{1}{k},$$

woraus (37) hervorgeht.

2. Der Punkt ζ kommt in keinem der Systeme $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ vor. Dann ist

$$\gamma_\tau < \zeta < \gamma_{\tau+1} \text{ und } \zeta - \frac{2}{k} < \gamma_{\tau-1} < \eta_\tau \equiv \eta_{\tau+1} < \gamma_{\tau+2} < \zeta + \frac{2}{k} \quad . \quad . \quad (40)$$

und die Funktionen $\varphi(\gamma)$ und $\phi(\gamma)$ sind in ζ stetig, so dasz bei hinreichend groszem k

$$\varphi(\gamma_{\tau+1}) < \varphi(\zeta) + \varepsilon \equiv \psi(\zeta) + \varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

und

$$\phi(\gamma_\tau) > \phi(\zeta) - \varepsilon \equiv \psi(\zeta) - \varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

ist.

2.1. Die Funktion $\psi(\gamma)$ sei in ζ unstetig. Für hinreichend großes k gilt (38) für jedes $\gamma \neq \zeta$ im offenen Intervall $\left(\zeta - \frac{2}{k}, \zeta + \frac{2}{k}\right)$, so dasz

dann nach der im ersten Schritt gegebenen Definition und wegen (40) $\eta_\tau = \eta_{\tau+1} = \zeta$ ist. Die Hauptungleichung (34) (mit $\tau = \tau$, bzw. mit $\tau + 1$ statt τ angewendet) liefert dann einerseits wegen (42)

$$\chi(\gamma_\tau) > \psi(\zeta) - \varepsilon,$$

andererseits wegen (41)

$$\chi(\gamma_{\tau+1}) < \psi(\zeta) + \varepsilon + \frac{1}{k},$$

woraus folgt

$$\psi(\zeta) - \varepsilon < \chi(\zeta) < \psi(\zeta) + \varepsilon + \frac{1}{k}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

Diese Ungleichung liefert die Behauptung.

2.2. Die Funktion $\psi(\gamma)$ sei in ζ stetig. Für hinreichend großes k gilt (39) im offenen Intervall $\left(\zeta - \frac{1}{k}, \zeta + \frac{1}{k}\right)$ und somit $\psi(\gamma_\tau) > \psi(\zeta) - \varepsilon$ und $\psi(\gamma_{\tau+1}) < \psi(\zeta) + \varepsilon$. Die Hauptungleichung liefert wiederum (43), womit die Behauptung des dritten Schrittes bewiesen ist.

Vierter Schritt: Abschluss des Beweises.

In der Folge Ω interpoliere ich zwischen je zwei konsekutiven Funktionen $\omega_n(\gamma)$ und $\omega_{n+1}(\gamma)$ die $n-1$ Funktionen

$$\frac{n-h}{n} \omega_n(\gamma) + \frac{h}{n} \omega_{n+1}(\gamma) \quad (h=1, 2, \dots, n). \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

Die so erhaltene Funktionenfolge

$$\omega_1(\gamma), \frac{\omega_1(\gamma) + \omega_2(\gamma)}{2}, \omega_2(\gamma), \frac{2\omega_2(\gamma) + \omega_3(\gamma)}{3}, \dots,$$

die ich mit $\varphi_1(\gamma), \varphi_2(\gamma), \dots$ bezeichne, besitzt die in Satz 5 genannten Eigenschaften. Denn jede in Ω , also auch jede in der Folge $\varphi_1(\gamma), \varphi_2(\gamma), \dots$ vorkommende Funktion ist monoton-nichtabnehmend stetig, $\equiv 0$ und $\equiv 1$. Nach dem Obigen ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \varphi_n(\zeta) \equiv \varphi(\gamma) \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \varphi_n(\zeta) \equiv \phi(\gamma),$$

so dass jede Grenzfunktion der Folge $\varphi_1(\gamma), \varphi_2(\gamma), \dots$ zur Menge \mathfrak{M} der monoton-nichtabnehmenden Funktionen $\psi(\gamma)$ mit $\varphi(\gamma) \equiv \psi(\gamma) \equiv \phi(\gamma)$ gehört. Nach dem vorigen Schritt ist jede zu \mathfrak{M} gehörige Funktion eine Grenzfunktion der Folge Ω , also auch der Folge $\varphi_1(\gamma), \varphi_2(\gamma), \dots$. Schliesslich ist

$$\lim_{p \rightarrow \infty} (\varphi_{p+1}(\gamma) - \varphi_p(\gamma)) = 0,$$

denn aus (44) geht hervor, dass jedem p ein mit p unbeschränkt wachsendes n mit

$$|\varphi_{p+1}(\gamma) - \varphi_p(\gamma)| = \frac{|\omega_n(\gamma) - \omega_{n+1}(\gamma)|}{n} \leq \frac{1}{n}$$

entspricht. Die in Satz 5 genannten Bedingungen sind somit erfüllt, so dass \mathfrak{M} nach diesem Satz die Menge der Verteilungsfunktionen einer geeignet gewählten, aus untereinander verschiedenen Zahlen bestehenden Folge ist. Nach Satz 4 kann dann jede im Intervall $(-\infty, \infty)$ überall dichte Folge so umgeordnet werden, dass \mathfrak{M} die Menge der Verteilungsfunktionen der umgeordneten Folge wird.

Hiermit ist Satz 9 bewiesen.

Beweis von Satz 10.

Ich werde zeigen: sind $\psi_1(\gamma), \psi_2(\gamma), \dots$ Verteilungsfunktionen einer Folge U , und existiert für jedes γ der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(\gamma) = \psi(\gamma), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

so ist auch $\psi(\gamma)$ eine Verteilungsfunktion von U .

Da die $\psi_n(\gamma)$ als Verteilungsfunktionen monoton-nichtabnehmend, ≥ 0 und ≤ 1 sind, ist auch die Grenzfunktion $\psi(\gamma)$ monoton-nichtabnehmend, ≥ 0 und ≤ 1 .

Es sei ε beliebig positiv. Ich bestimme nun eine von ε abhängige natürliche Zahl l und die gleichfalls von ε abhängigen Zahlen $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_l$ mit

$$\gamma_1 < -\frac{1}{\varepsilon}; \quad \gamma_l > \frac{1}{\varepsilon}; \quad \gamma_\lambda - \gamma_{\lambda-1} < \varepsilon \quad (2 \leq \lambda \leq l), \quad . \quad . \quad (46)$$

so dass für $\lambda = 2, 3, \dots, l$ in jedem der offenen Intervalle $(\gamma_{\lambda-1}, \gamma_\lambda)$ die Schwankung der Funktion $\psi(\gamma)$ kleiner als ε ist, und ausserdem jeder etwaige Punkt γ , in dem der Sprung $\psi(\gamma+) - \psi(\gamma-)$ grösser als ε ist, im System $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_l$ vorkommt.

Wegen (45) existiert eine (von ε abhängige) natürliche Zahl n mit

$$|\psi_n(\gamma_\lambda) - \psi(\gamma_\lambda)| < \frac{1}{2} \varepsilon \quad (1 \leq \lambda \leq l). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

Da $\psi_n(\gamma)$ eine Verteilungsfunktion von U ist, existiert eine (von ε abhängige) natürliche Zahl $x > \frac{1}{\varepsilon}$ mit

$$\left| \frac{1}{x} A_{\gamma_\lambda}(x) - \psi_n(\gamma_\lambda) \right| < \frac{1}{2} \varepsilon \quad (1 \leq \lambda \leq l),$$

also wegen (47) auch mit

$$\left| \frac{1}{x} A_{\gamma_\lambda}(x) - \psi(\gamma_\lambda) \right| < \varepsilon \quad (1 \leq \lambda \leq l). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

Strebt das positive ε nach Null, so wächst das von ε abhängige x unbeschränkt. Ich brauche nur zu zeigen, dass dabei $\frac{A_\gamma(x)}{x}$ für jedes γ nach $\psi(\gamma)$ strebt, und dazu unterscheide ich zwei verschiedene Fälle.

1. Es sei γ ein Unstetigkeitspunkt von ψ . Bei hinreichend kleinem $\varepsilon > 0$ ist dann $\psi(\gamma+) - \psi(\gamma-) > \varepsilon$, so dass γ einer der obengenannten Punkte $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_l$ ist. Aus (48) folgt daher

$$\left| \frac{A_\gamma(x)}{x} - \psi(\gamma) \right| < \varepsilon,$$

so dass $\frac{A_\gamma(x)}{x}$ nach $\psi(\gamma)$ strebt.

2. Es sei γ ein Stetigkeitspunkt von ψ . Jedem positiven δ kann ich dann ein den Punkt γ enthaltendes offenes Intervall (α, β) zuordnen, so dass die Schwankung von ψ in diesem Intervall kleiner als $\frac{1}{2} \delta$ ist. Ich wähle nun das positive ε gemäsz

$$-\frac{1}{\varepsilon} < \alpha < \beta < \frac{1}{\varepsilon}; \quad \varepsilon < \delta; \quad \varepsilon < \gamma - \alpha; \quad \varepsilon < \beta - \gamma.$$

Aus (46) geht hervor, dass

$$\gamma_1 < -\frac{1}{\varepsilon} < \alpha < \beta < \frac{1}{\varepsilon} < \gamma_l$$

ist, und dass jedes zwischen γ_1 und γ_l liegende offene Intervall einer Länge $> \varepsilon$ wenigstens einen Punkt des Systems $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_l$ enthält. Das gilt also auch für die Intervalle (α, γ) und (γ, β) . Sind γ_ρ und γ_σ zwei Punkte des Systems $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_l$, und zwar so, dass γ_ρ im offenen Intervall (α, γ) und γ_σ im offenen Intervall (γ, β) liegt, so liefert (48), mit $\lambda = \rho$, bzw. mit $\lambda = \sigma$ angewendet,

$$\frac{A_\gamma(x)}{x} \equiv \frac{A_{\gamma_\sigma}(x)}{x} < \psi(\gamma_\sigma) + \varepsilon < \psi(\gamma) + \delta + \varepsilon < \psi(\gamma) + 2\delta$$

und

$$\frac{A_\gamma(x)}{x} \equiv \frac{A_{\gamma_\rho}(x)}{x} > \psi(\gamma_\rho) - \varepsilon > \psi(\gamma) - \delta - \varepsilon > \psi(\gamma) - 2\delta.$$

Folglich strebt auch in diesem Falle $\frac{A_\gamma(x)}{x}$ nach $\psi(\gamma)$, womit Satz 10 bewiesen ist.

Für den Beweis von Satz 11 brauche ich noch

Hilfssatz 6: Sind t Folgen

$$\chi_{1\tau}(\gamma), \quad \chi_{2\tau}(\gamma), \dots$$

($\tau = 1, 2, \dots, t$) von monotonen nicht-abnehmenden Funktionen ≥ 0 und ≤ 1 gegeben, so gibt es eine Folge N monoton-wachsender natürlicher Zahlen mit der Eigenschaft, von $\chi_{n\tau}(\gamma)$ für jedes γ und für $\tau = 1, 2, \dots, t$ gegen einen Grenzwert strebt, wenn n die Folge N durchläuft.

Beweis. Da der Spezialfall mit $t = 1$ schon in Hilfssatz 1 bewiesen ist, darf ich $t \geq 2$ annehmen, und den zu beweisenden Hilfssatz mit $t - 1$ statt t schon als bewiesen voraussetzen. Bei geeignet gewählter Folge P strebt dann $\chi_{n\tau}(\gamma)$ für jedes γ und für $\tau = 1, \dots, t - 1$ nach einem Grenzwert, wenn n die Folge P durchläuft. P enthält nach Hilfssatz 1 der zweiten Mitteilung (S. 1058) eine Teilfolge N mit der Eigenschaft, dass $\chi_{nt}(\gamma)$ für jedes γ nach einem Grenzwert strebt, wenn n die Folge N durchläuft. Hiermit ist Hilfssatz 6 bewiesen.

Beweis von Satz 11.

Die Punkte (ζ, \dots, ζ_k) , denen eine Verteilungsfunktion von U mit

$$\psi(\eta_1) = \zeta_1, \dots, \psi(\eta_k) = \zeta_k$$

zugeordnet werden kann, bilden eine k -dimensionale Menge, die ich \mathfrak{R} nenne. Es genügt einen Widerspruch abzuleiten aus der Annahme, dass man \mathfrak{R} in zwei nicht-leere abgeschlossene Punktmengen \mathfrak{A} und \mathfrak{B} zerlegen kann, die keinen gemeinsamen Punkt besitzen. Die Mengen \mathfrak{A} und \mathfrak{B} haben dann bei geeignet gewähltem positiven ganzen l eine Entfernung $> \frac{k}{l}$ voneinander.

Ich wähle zwei Verteilungsfunktionen $\varphi(\gamma)$ und $\chi(\gamma)$ von U , so dass $(\varphi(\eta_1), \dots, \varphi(\eta_k))$ zu \mathfrak{A} und $(\chi(\eta_1), \dots, \chi(\eta_k))$ zu \mathfrak{B} gehört. Dann gibt es zwei Folgen x_1, x_2, \dots und y_1, y_2, \dots mit

$$y_n > x_n; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_\gamma(x_n)}{x_n} = \varphi(\gamma); \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_\gamma(y_n)}{y_n} = \chi(\gamma). \quad . \quad . \quad (49)$$

Für jedes positive ganze q setze ich

$$\frac{1}{l} \left[\frac{l U_\gamma(q)}{q} \right] = p_\gamma(q); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

hierin ist $[u]$ die grösste ganze Zahl $\leq u$. Die Zahl $l p_\gamma(q)$ ist ganz, ≥ 0 und $\leq l$, nimmt also höchstens $l + 1$ verschiedene Werte an, sodass das System

$$P(q) = (p_{\eta_1}(q), \dots, p_{\eta_k}(q))$$

höchstens $(l + 1)^k$ verschiedene Werte annimmt.

Ich definiere für ganzes $n > 0$ folgendermassen die natürlichen Zahlen $t_n, q_{n1}, \dots, q_{n,t_n}$:

Ich setze $q_{n1} = x_n$, und wähle für q_{n2} die grösste ganze Zahl q gemäsz

$$q_{n1} < q \leq y_n, \quad P(q) = P(q_{n1} + 1).$$

Ist $q_{n2} = y_n$, so setze ich $t_n = 2$. Sonst wähle ich für q_{n3} die grösste ganze Zahl q gemäsz

$$q_{n2} < q \leq y_n, \quad P(q) = P(q_{n2} + 1).$$

Ist $q_{n3} = y_n$, so setze ich $t_n = 3$. Sonst gehe ich weiter und definiere q_{n4}, q_{n5}, \dots , bis ich eine Zahl $q_{n,t_n} = y_n$ bekomme. Da $P(q)$ höchstens $(l+1)^k$ verschiedene Werte annimmt und die Systeme $P(q_{n2}), \dots, P(q_{n,t_n})$, ihrer Definition gemäsz, von einander verschieden sind, ist $t_n \leq 1 + (l+1)^k$. Durchläuft also n eine geeignet gewählte Folge N' , so hat t_n einen von n unabhängigen Wert t . Für jedes zu N' gehörige n finde ich so t monoton-nichtabnehmende Funktionen

$$\frac{U_\gamma(q_{n\tau})}{q_{n\tau}} \quad (\tau = 1, 2, \dots, t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

von γ , die alle ≥ 0 und ≤ 1 sind. Nach dem vorigen Hilfssatz enthält N' dann eine Teilfolge N von der Art, dass für jedes γ und für $\tau = 1, 2, \dots, t$ der Bruch (51) nach einem Grenzwert $\psi_\tau(\gamma)$ strebt, wenn n diese Teilfolge N durchläuft. Aus $q_{n1} = x_n$ und $q_{nt} = y_n$ folgt dabei wegen (49)

$$\varphi(\gamma) = \psi_1(\gamma) \quad \text{und} \quad \chi(\gamma) = \psi_t(\gamma),$$

so dass $(\psi_1(\eta_1), \dots, \psi_1(\eta_k))$ zu \mathfrak{A} und $(\psi_t(\eta_1), \dots, \psi_t(\eta_k))$ zu \mathfrak{B} gehört. Bei geeignet gewähltem τ ($1 \leq \tau \leq t-1$) gehört dann $(\psi_\tau(\eta_1), \dots, \psi_\tau(\eta_k))$ zu \mathfrak{A} und $(\psi_{\tau+1}(\eta_1), \dots, \psi_{\tau+1}(\eta_k))$ zu \mathfrak{B} . Aus (50) folgt

$$0 \leq \frac{U_\gamma(q_{n,\tau+1})}{q_{n,\tau+1}} - p_\gamma(q_{n,\tau+1}) < \frac{1}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

und

$$0 \leq \frac{U_\gamma(q_{n\tau} + 1)}{q_{n\tau} + 1} - p_\gamma(q_{n\tau} + 1) < \frac{1}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

Hierbei ist der Ausdruck

$$\frac{U_\gamma(q_{n\tau} + 1)}{q_{n\tau} + 1} - \frac{U_\gamma(q_{n\tau})}{q_{n\tau}}$$

einerseits

$$\leq \frac{U_\gamma(q_{n\tau}) + 1}{q_{n\tau} + 1} - \frac{U_\gamma(q_{n\tau})}{q_{n\tau}} \leq \frac{1}{q_{n\tau} + 1}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

andrerseits

$$\cong \frac{U_{\gamma}(q_{n\tau})}{q_{n\tau} + 1} - \frac{U_{\gamma}(q_{n\tau})}{q_{n\tau}} = - \frac{U_{\gamma}(q_{n\tau})}{q_{n\tau}(q_{n\tau} + 1)} \cong \frac{-1}{q_{n\tau} + 1} \dots \quad (55)$$

Schliesslich ist noch, der Definition der Zahlen $q_{n\tau}$ und $q_{n,\tau+1}$ gemäss:

$$p_{\eta_{\kappa}}(q_{n\tau} + 1) = p_{\eta_{\kappa}}(q_{n,\tau+1}) \quad (\kappa = 1, 2, \dots, k). \quad (56)$$

Aus (52), (53), (54), (55) (mit $\gamma = \eta_{\kappa}$ angewendet) und (56) folgt

$$\left| \frac{U_{\eta_{\kappa}}(q_{n,\tau+1})}{q_{n,\tau+1}} - \frac{U_{\eta_{\kappa}}(q_{n\tau})}{q_{n\tau}} \right| < \frac{1}{l} + \frac{1}{q_{n\tau} + 1} \quad (\kappa = 1, 2, \dots, k) \quad (57)$$

Durchläuft n die Folge N , so wächst $q_{n\tau} \cong q_{n1} = x_n$ unbeschränkt, und die linke Seite von (57) strebt nach $|\psi_{\tau+1}(\eta_{\kappa}) - \psi_{\tau}(\eta_{\kappa})|$, sodasz

$$|\psi_{\tau+1}(\eta_{\kappa}) - \psi_{\tau}(\eta_{\kappa})| \leq \frac{1}{l} \quad (\kappa = 1, 2, \dots, k)$$

ist. Die den Punkt $(\psi_{\tau}(\eta_1), \dots, \psi_{\tau}(\eta_k))$ enthaltende Menge \mathfrak{A} und die der Punkt $(\psi_{\tau+1}(\eta_1), \dots, \psi_{\tau+1}(\eta_k))$ enthaltende Menge \mathfrak{B} haben also eine Entfernung $\cong \frac{k}{l}$ voneinander, womit der Widerspruch gefunden ist.

Mathematics. — *Verteilungsfunktionen.* Von J. G. VAN DER CORPUT
(Vierte Mitteilung).

(Communicated at the meeting of December 21, 1935).

Formulierung einer hinreichenden Bedingung.

Zunächst verallgemeinere ich den in der Einleitung ¹⁾ (S. 816) vorkommenden Satz 6. Ausserdem formuliere ich eine hinreichende Bedingung, damit eine beliebig vorgegebene Folge so umgeordnet werden kann, dass die Menge der Verteilungsfunktionen der umgeordneten Folge eine vorgegebene Funktionenmenge sei. Schliesslich leite ich einige Hilfssätze ab, die ich für den Beweis dieser hinreichenden Bedingung brauche.

In der Einleitung (S. 819) habe ich die Eigenschaft $\mathfrak{G}(U)$ eingeführt, um die Folgen, die im Intervall $(-\infty, \infty)$ nicht überall dicht liegen, behandeln zu können. Der folgende Satz ist eine Verallgemeinerung des in der Einleitung vorkommenden Satzes 6.

¹⁾ Erste Mitteilung, Diese Proceedings 38 (1935), N^o. 8, S. 813—821. Zweite Mitteilung 38 (1935), N^o. 10, S. 1058—1066, Dritte Mitteilung 39 (1936), N^o. 1, S. 10.

Satz 19: Ist U irgend eine Folge und $\psi(\gamma)$ irgend eine stetige monoton-nichtabnehmende Funktion mit Eigenschaft $\mathfrak{G}(U)$ und

$$\lim_{\gamma \rightarrow -\infty} \psi(\gamma) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \psi(\gamma) = 1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

so kann U durch Umordnung in eine Folge W mit der Verteilungsfunktion $\psi(\gamma)$ übergeführt werden, und zwar so, dass für jedes γ und jede natürliche Zahl x

$$|W_\gamma(x) - x\psi(\gamma)| < 2 + 2 \log x$$

ist.

Bemerkung: Ist U im Intervall $(-\infty, \infty)$ überall dicht, so besitzt jede monoton-nichtabnehmende Funktion ≥ 0 und ≤ 1 die Eigenschaft $\mathfrak{G}(U)$, sodass Satz 6 nur ein Spezialfall von Satz 19 ist.

Beweis: Es sei V die in Hilfssatz 5 (S. 1063) eingeführte Folge. Jeder zu V gehörige Punkt v_x ist ein Häufungspunkt von U . Denn für jedes $\beta > v_x$ enthält das Intervall $v_x \leq \gamma < \beta$ mindestens einen Punkt von V , nämlich v_x , sodass nach Hilfssatz 5

$$\psi(v_x) < \psi(\beta)$$

ist; da $\psi(\gamma)$ die Eigenschaft $\mathfrak{G}(U)$ besitzt, enthält U unendlich viele Zahlen u mit $v_x \leq u < \beta$, sodass v_x in der Tat ein Häufungspunkt von U ist. Der Beweis (S. 1064) von Satz 6, wörtlich wiederholt, liefert die Behauptung von Satz 19.

Definition 2: Es sei U irgend eine Folge. Einen Punkt γ nenne ich einen Häufungspunkt von U , falls jedes den Punkt γ enthaltende offene Intervall unendlich viele Punkte von U enthält. Einen Punkt α mit der Eigenschaft, dass U für jedes $\beta > \alpha$ unendlich viele Punkte u mit $\alpha \leq u < \beta$ enthält, nenne ich einen Häufungspunkt nach rechts von U . Einen Punkt β mit der Eigenschaft, dass U für jedes $\alpha < \beta$ unendlich viele Punkte u mit $\alpha \leq u < \beta$ enthält, nenne ich einen Häufungspunkt nach links von U .

Jeder Häufungspunkt ist ein Häufungspunkt nach rechts, oder nach links oder nach beiden Richtungen. Häufungspunkte nach rechts, sowie auch Häufungspunkte nach links sind Häufungspunkte. Ein Punkt, der unendlich oft in U vorkommt, ist ein Häufungspunkt nach rechts von U , braucht aber nicht ein Häufungspunkt nach links von U zu sein.

Die Häufungspunkte α nach rechts von U , denen ein $\beta > \alpha$ zugeordnet werden kann mit der Eigenschaft, dass das offene Intervall (α, β) keine Häufungspunkte von U enthält, bilden eine (eventuel leere) Menge, die ich $r(U)$ nennen werde. Die Häufungspunkte β nach links von U , denen ein $\alpha < \beta$ zugeordnet werden kann mit der Eigenschaft, dass das offene Intervall (α, β) keine Häufungspunkte von U enthält, bilden eine (eventuel leere) Menge, die ich $l(U)$ nennen werde. Ich wähle hier die Buchstaben r und l als Anfangsbuchstaben von rechts und links.

Ich sage, dasz eine Funktion, die die Eigenschaft $\mathfrak{G}(U)$ hat, überall ausserhalb $r(U)$ nach rechts, und überall ausserhalb $l(U)$ nach links stetig ist, die Eigenschaft $\mathfrak{G}(u)$ besitzt.

Der folgende Satz liefert eine hinreichende Bedingung, damit eine beliebig vorgegebene Folge U so umgeordnet werden kann, dasz die Menge der Verteilungsfunktionen der umgeordneten Folge eine vorgegebene Funktionenmenge \mathfrak{M} sei.

Satz 20: *Ist U eine Folge, und besteht die Funktionenmenge \mathfrak{M} aus Funktionen mit Eigenschaft $\mathfrak{G}(U)$, dann kann U so umgeordnet werden, dasz \mathfrak{M} die Menge der Verteilungsfunktionen der umgeordneten Folge W ist, wenn es eine Folge $\varphi_1(\gamma), \varphi_2(\gamma), \dots$ von Funktionen mit Eigenschaft $\mathfrak{G}(U)$ gibt, die den folgenden Bedingungen genügt:*

1. *Jede Grenzfunktion der Folge $\varphi_1(\gamma), \varphi_2(\gamma), \dots$ gehört zu \mathfrak{M} .*
2. *Jede zu \mathfrak{M} gehörige Funktion ist eine Grenzfunktion der Folge $\varphi_1(\gamma), \varphi_2(\gamma), \dots$.*
3. *Schliesslich ist*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi_{n+1}(\gamma) - \varphi_n(\gamma)) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59)$$

Für den Beweis von Satz 20 brauche ich verschiedene Hilfssätze.

Hilfssatz 7: *Es sei k unendlich oder es sei k ganz > 0 ; es sei $p_\kappa \equiv 0$ ($0 \equiv \kappa < k$) mit*

$$\sum_{0 \equiv \kappa < k} p_\kappa = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60)$$

und es sei γ_κ ($0 \equiv \kappa < k$) beliebig.

Dann kann jede endliche Menge M in k Teilmengen T_κ ($0 \equiv \kappa < k$) zerlegt werden, von der Art dasz T_κ für ein etwaiges κ mit $p_\kappa = 0$ leer ist, ausserdem

$$|\tau_\kappa - p_\kappa m| < 1 \quad (0 \equiv \kappa < k) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

und schliesslich für jedes γ

$$\left| \sum_{\substack{0 \equiv \kappa < k \\ \gamma_\kappa < \gamma}} (\tau_\kappa - p_\kappa m) \right| < 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62)$$

ist; hierin ist m die Anzahl der Elemente von M , und τ_κ die Anzahl der Elemente von T_κ .

Beweis: Ist k endlich, so setze ich $l = k - 1$; sonst wähle ich eine natürliche Zahl l mit

$$\sum_{\lambda=l}^{\infty} p_\lambda < \frac{1}{2m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (63)$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann ich

$$\gamma_0 \equiv \gamma_1 \equiv \dots \equiv \gamma_{l-1}$$

voraussetzen, da ich sonst nur die Zahlen $\gamma_0, \dots, \gamma_{l-1}$, die Zahlen p_0, \dots, p_{l-1} und die Teilmengen T_0, \dots, T_{l-1} untereinander zu vertauschen brauche.

Werden die ganzen Zahlen $q_{-1} = 0, q_0, \dots, q_{l-1}$ durch

$$-\frac{1}{2} < m \sum_{\lambda=0}^{\cdot} p_{\lambda} - q_{\kappa} \leq \frac{1}{2} \quad (\kappa = 0, \dots, l-1) \quad . \quad . \quad . \quad (64)$$

festgelegt, so ist

$$0 = q_{-1} \leq q_0 \leq \dots \leq q_{l-1}.$$

Aus (64), mit $\kappa = l-1$ angewendet, folgt einerseits (wegen (60)) $q_{l-1} \leq m + \frac{1}{2}$, andererseits (wegen (63))

$$q_{l-1} > m \left(1 - \frac{1}{2m}\right) - \frac{1}{2} = m-1,$$

sodasz die ganze Zahl q_{l-1} gleich der Elementanzahl m von M ist. M kann somit in l Teilmengen T_{λ} ($0 \leq \lambda \leq l-1$) zerlegt werden mit der Eigenschaft, dasz T_{λ} genau $\tau_{\lambda} = q_{\lambda} - q_{\lambda-1}$ Zahlen enthält. Ist $k = \infty$, so wähle ich die Mengen T_{κ} mit $\kappa \geq l$ leer. Ich werde nun zeigen, dasz die so definierten Mengen T_{κ} ($0 \leq \kappa < k$) die verlangten Eigenschaften besitzen.

Jede Menge T_{κ} mit $\kappa \geq l$ ist leer. Für jede Menge T_{κ} mit $0 \leq \kappa < l$ und $p_{\kappa} = 0$ ist $q_{\kappa} = q_{\kappa-1}$ wegen (64), sodasz T_{κ} auch dann leer ist.

Für jedes $\kappa \geq l$ ist (61) evident, da dann $\tau_{\kappa} = 0$ und (wegen (63)) $p_{\kappa} < \frac{1}{2}m$ ist. Für $0 \leq \kappa < l$ ist

$$\left| \sum_{\lambda=0}^{\kappa} (\tau_{\lambda} - p_{\lambda} m) \right| = \left| q_{\kappa} - m \sum_{\lambda=0}^{\kappa} p_{\lambda} \right| \leq \frac{1}{2} \quad . \quad . \quad . \quad (65)$$

wegen (64), sodasz auch dann (61) gilt.

Schlieszlich kann man jedem γ ein σ ($-1 \leq \sigma \leq l-1$) mit $\gamma_{\sigma} < \gamma \leq \gamma_{\sigma+1}$ zuordnen (hierin ist $\gamma_{-1} = -\infty$ und $\gamma_l = \infty$) und dann ist

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\substack{0 \leq \kappa < k \\ \gamma_{\kappa} < \gamma}} (\tau_{\kappa} - p_{\kappa} m) \right| &= \left| \sum_{\substack{0 \leq \kappa < l \\ \gamma_{\kappa} < \gamma}} (\tau_{\kappa} - p_{\kappa} m) - m \sum_{\substack{\kappa \geq l \\ \gamma_{\kappa} < \gamma}} p_{\kappa} \right| \\ &< \left| \sum_{\substack{0 \leq \kappa < l \\ \gamma_{\kappa} < \gamma}} (\tau_{\kappa} - p_{\kappa} m) \right| + \frac{1}{2} \text{ wegen (63)} \\ &= \left| \sum_{\kappa=0}^{\sigma} (\tau_{\kappa} - p_{\kappa} m) \right| + \frac{1}{2} \leq 1 \end{aligned}$$

wegen (65) (diese Formel ist mit $\kappa = -1$ evident).

Hiermit ist Hilfssatz 7 bewiesen.

Hilfssatz 8: Es sei k unendlich oder es sei k ganz ≥ 3 ; es sei $p_x \geq 0$ ($0 \leq x < k$) mit

$$\sum_{0 \leq x < k} p_x = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (66)$$

und es sei γ_x ($4 \leq x < k$) beliebig.

Dann kann jede endliche Menge M in k Teilmengen T_x ($0 \leq x < k$) zerlegt werden, von der Art, dass T_x für ein etwaiges x mit $p_x = 0$ leer ist,

$$|\tau_x - p_x m| < \frac{3}{2} \quad (0 \leq x < k) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (67)$$

und ausserdem für jedes γ

$$\left| \sum_{\substack{3 \leq x < k \\ \gamma_x < \gamma}} (\tau_x - p_x m) \right| < \frac{3}{2} - 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (68)$$

ist; hierin ist m die Anzahl der Elemente von M , und τ_x die Anzahl der Elemente von T_x .

Beweis: Ich bestimme drei ganze Zahlen τ_0, τ_1, τ_2 durch

$$-\frac{1}{2} < \tau_0 - p_0 m \leq \frac{1}{2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (69)$$

$$-\frac{1}{2} < \tau_0 + \tau_1 - (p_0 + p_1) m \leq \frac{1}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (70)$$

und

$$-\frac{1}{2} < \tau_0 + \tau_1 + \tau_2 - (p_0 + p_1 + p_2) m \leq \frac{1}{2} \quad . \quad . \quad . \quad (71)$$

Die Zahlen τ_0, τ_1, τ_2 sind dann ≥ 0 mit

$$-1 < \tau_1 - p_1 m < 1, \quad -1 < \tau_2 - p_2 m < 1 \quad . \quad . \quad . \quad (72)$$

und $\tau_0 + \tau_1 + \tau_2 \leq m$. Ich unterscheide nun zwei Fälle, je nachdem $\tau_0 + \tau_1 + \tau_2$ gleich oder kleiner als m ist.

1. Es sei

$$\tau_0 + \tau_1 + \tau_2 = m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (73)$$

Dann kann man M in drei elementfremde Teilmengen T_x ($x=0, 1, 2$), aus τ_x Elemente bestehend, zerlegen. Für die etwaigen x mit $3 \leq x < k$ nehme ich T_x leer. Die so definierten Teilmengen T_x ($0 \leq x < k$) besitzen die verlangten Eigenschaften. Denn T_x ist für jedes x mit $3 \leq x < k$ leer; für jedes x mit $0 \leq x < 3$ und $p_x = 0$ ist $\tau_x = 0$ wegen (69) und (72), sodass auch dann T_x leer ist; Formel (67) folgt für $x=0, 1, 2$ unmittelbar aus (69) und (72); schliesslich ist wegen (66) und (73)

$$m \sum_{3 \leq x < k} p_x = m(1 - p_0 - p_1 - p_2) = \tau_0 + \tau_1 + \tau_2 - m(p_0 + p_1 + p_2) \leq \frac{1}{2}$$

¹⁾ Ist $k=3$, so ist jede Summe $\sum_{3 \leq x < k}$ leer, also gleich Null.

wegen (71), woraus (68) und ausserdem (67) für jedes κ mit $3 \leq \kappa < k$ folgt, da τ_κ für jedes $\kappa \geq 3$ gleich Null ist.

2. Es sei

$$\tau_0 + \tau_1 + \tau_2 < m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (74)$$

Ich zerlege M in vier elementfremde Teilmengen T_0, T_1, T_2 und N , bzw. aus τ_0, τ_1, τ_2 und $m - (\tau_0 + \tau_1 + \tau_2)$ Elementen bestehend. Aus (71) und (74) folgt $p_0 + p_1 + p_2 < 1$, sodass wegen (66) mindestens eine der Zahlen p_κ mit $3 \leq \kappa < k$ ungleich Null, also $k \geq 4$ ist. Formel (66) verwandelt sich in

$$\sum_{3 \leq \kappa < k} \frac{p_\kappa}{1 - p_0 - p_1 - p_2} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (75)$$

Nach dem vorigen Hilfssatz, mit $k-3$ statt k und mit $\frac{p_\kappa}{1 - p_0 - p_1 - p_2}$ statt p_κ angewendet, kann man N in $k-3$ Teilmengen T_κ ($3 \leq \kappa < k$) zerlegen, von der Art, dass T_κ für ein etwaiges κ mit $3 \leq \kappa < k$ und $p_\kappa = 0$ leer ist, ausserdem

$$\left| \tau_\kappa - \frac{p_\kappa (m - \tau_0 - \tau_1 - \tau_2)}{1 - p_0 - p_1 - p_2} \right| < 1 \quad (3 \leq \kappa < k) \quad . \quad . \quad . \quad (76)$$

und schliesslich für jedes γ

$$\left| \sum_{\substack{3 \leq \kappa < k \\ \gamma_\kappa < \gamma}} \left(\tau_\kappa - \frac{p_\kappa (m - \tau_0 - \tau_1 - \tau_2)}{1 - p_0 - p_1 - p_2} \right) \right| < 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (77)$$

ist.

Ich werde zeigen, dass die so definierten Teilmengen T_κ ($0 \leq \kappa < k$) die verlangten Eigenschaften besitzen. Ist $p_\kappa = 0$ ($0 \leq \kappa < 3$), so ist wegen (69) und (72) $\tau_\kappa = 0$, also T_κ leer. Für jedes κ mit $3 \leq \kappa < k$ und $p_\kappa = 0$ ist die Menge T_κ ihrer Definition gemäss leer. Für $\kappa = 0, 1, 2$ folgt (67) unmittelbar aus (69) und (72). Ausserdem ist

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{3 \leq \kappa < k \\ \gamma_\kappa < \gamma}} \left| \left(\tau_\kappa - p_\kappa m \right) - \left(\tau_\kappa - \frac{p_\kappa (m - \tau_0 - \tau_1 - \tau_2)}{1 - p_0 - p_1 - p_2} \right) \right| \\ &= \frac{|\tau_0 + \tau_1 + \tau_2 - m(p_0 + p_1 + p_2)|}{1 - p_0 - p_1 - p_2} \sum_{\substack{3 \leq \kappa < k \\ \gamma_\kappa < \gamma}} p_\kappa \\ &\leq \frac{1}{2(1 - p_0 - p_1 - p_2)} \sum_{3 \leq \kappa < k} p_\kappa = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

wegen (71) und (75). Aus (77) folgt somit (68); und aus (76) geht also (67) für jedes κ mit $3 \leq \kappa < k$ hervor. Hiermit ist Hilfssatz 8 bewiesen.

Hilfssatz 9: *Es sei k unendlich oder ganz ≥ 3 ; es sei $p_\kappa \geq 0$ ($0 \leq \kappa < k$) mit*

$$\sum_{0 \leq \kappa < k} p_\kappa = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (78)$$

und es sei γ_κ ($4 \leq \kappa < k$) beliebig.

Dann kann die Folge der natürlichen Zahlen in k zahlenfremde Teilmengen D_κ ($0 \leq \kappa < k$) mit den folgenden Eigenschaften zerlegt werden:

Für ein etwaiges κ ($0 \leq \kappa < k$) mit $p_\kappa = 0$ ist D_κ leer; für jedes ganze $x \geq 0$ ist

$$|\delta_\kappa - p_\kappa x| \leq 5 \sqrt{x} \quad (0 \leq \kappa < k) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (79)$$

und für jedes ganze $x \geq 0$ und jedes γ ist

$$\left| \sum_{\substack{3 \leq \kappa < k \\ \gamma_\kappa < \gamma}} (\delta_\kappa - p_\kappa x) \right| \leq 5 \sqrt{x}; \quad ^1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (80)$$

hierin ist δ_κ die Anzahl der in D_κ vorkommenden Zahlen $\leq x$.

Beweis: Für jedes ganze $\lambda > 0$ kann ich das System

$$\frac{1}{2} \lambda (\lambda - 1) + 1, \quad \frac{1}{2} \lambda (\lambda - 1) + 2, \dots, \quad \frac{1}{2} (\lambda + 1) \lambda$$

nach dem vorigen Hilfssatz in k zahlenfremde Teilmengen $T_\kappa^{(\lambda)}$ ($0 \leq \kappa < k$) zerlegen, von der Art dasz $T_\kappa^{(\lambda)}$ für ein etwaiges κ mit $p_\kappa = 0$ leer ist,

$$|\tau_\kappa^{(\lambda)} - p_\kappa \lambda| < \frac{3}{2} \quad (0 \leq \kappa < k) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (81)$$

und ausserdem für jedes γ

$$\left| \sum_{\substack{3 \leq \kappa < k \\ \gamma_\kappa < \gamma}} (\tau_\kappa^{(\lambda)} - p_\kappa \lambda) \right| < \frac{3}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (82)$$

ist; hierin ist $\tau_\kappa^{(\lambda)}$ die Anzahl der in $T_\kappa^{(\lambda)}$ vorkommenden Zahlen. Bei gegebenem κ ($0 \leq \kappa < k$) bilden die zu einer der Mengen $T_\gamma^{(\lambda)}$ ($\lambda = 1, 2, \dots$) gehörigen Zahlen eine Menge, die ich D_κ nennen werde. Ich werde zeigen, dasz diese Mengen D_κ ($0 \leq \kappa < k$) die verlangten Eigenschaften besitzen.

Für ein etwaiges κ mit $p_\kappa = 0$ sind alle $T_\kappa^{(\lambda)}$ ($\lambda = 1, 2, \dots$) leer, ist

¹⁾ Ist $k = 3$, so ist die Summe $\sum_{3 \leq \kappa < k}$ leer, also gleich Null.

also auch D_γ leer. Beim Beweis der Ungleichungen (79) und (80) darf ich $x > 0$ voraussetzen, da sie sonst evident sind.

Der ganzen Zahl x ordne ich die natürliche Zahl l mit

$$\frac{1}{2} l(l-1) + 1 \leq x \leq \frac{1}{2} (l+1) l$$

zu. Dann ist für $0 \leq x < k$

$$0 \leq \delta_x - \sum_{\lambda=1}^{l-1} \tau_\gamma^{(\lambda)} \leq l,$$

sodasz aus (81) und

$$x - l \leq \sum_{\lambda=1}^{l-1} \lambda = \frac{1}{2} l(l-1) < x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (83)$$

folgt

$$-\frac{5}{2} l < -l - \frac{3}{2} \sum_{\lambda=1}^{l-1} 1 < \delta_x - p_x x < l + \frac{3}{2} \sum_{\lambda=1}^{l-1} 1 < \frac{5}{2} l \quad . \quad (84)$$

Hierin ist

$$\begin{aligned} l^2 &< 4x && \text{falls } l=1 \\ &\leq 2l(l-1) < 4x && \text{falls } l \geq 2, \end{aligned}$$

also

$$l < 2\sqrt{x}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (85)$$

sodasz (79) aus (84) folgt.

Außerdem ist für jedes γ

$$0 \leq \sum_{\substack{3 \leq x < k \\ \gamma_x < \gamma}} (\delta_x - \sum_{\lambda=1}^{l-1} \tau_x^{(\lambda)}) \leq l,$$

sodasz aus (82) folgt

$$-\frac{3}{2} l < \sum_{\substack{3 \leq x < k \\ \gamma_x < \gamma}} \delta_x - \frac{1}{2} l(l-1) \sum_{\substack{3 \leq x < k \\ \gamma_x < \gamma}} p_x < l + \frac{3}{2} l = \frac{5}{2} l,$$

somit aus (83)

$$-\frac{5}{2} l < \sum_{\substack{3 \leq x < k \\ \gamma_x < \gamma}} \delta_x - x \sum_{\substack{3 \leq x < k \\ \gamma_x < \gamma}} p_x < \frac{5}{2} l.$$

Ungleichung (85) liefert nun (80), womit Hilfssatz 9 bewiesen ist.

Mathematics. — *Über allgemeine konforme Geometrie in projektiver Behandlung.* II. Von J. A. SCHOUTEN und J. HAANTJES.

(Communicated at the meeting of December 21, 1935).

Wir kündigen ein Theorem an, dessen Beweis an anderer Stelle veröffentlicht werden soll und dass eine Ergänzung bildet unseres Theorems über die eindeutige Einbettung einer X_n (n ungerade) mit einer allgemeinen konformen Geometrie in eine H_{n+1} ¹⁾.

Das Theorem lautet:

Zu einer X_4 mit einer allgemeinen konformen Geometrie, lässt sich eine H_5 mit einer symmetrischen und speziellen Punktübertragung $\Pi_{\gamma\beta}^\alpha$ und Fundamentalprojektor $\alpha_{\beta\alpha}$ konstruieren, derart dass

1. in H_5 überall gilt

$$\nabla_\gamma \alpha_{\beta\alpha} = 0$$

$$N_{\alpha\gamma\beta}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} = 0,$$

2. die X_4 sich eineindeutig abbildet auf die Hyperfläche $\alpha_{\beta\alpha} x^\beta x^\alpha = 0$ der H_5 ,

3. der Kegel der asymptotischen Richtungen in jedem Punkte dieser Hyperfläche dem Nullkegel des Fundamentaltensors der X_4 entspricht, vorausgesetzt, dass in der X_4 die (nur für $n=4$) bei konformen Transformationen des Fundamentaltensors g_{ih} invariante (symmetrische) Tensordichte vom Gewicht $\frac{1}{2}$

$$\mathfrak{G}_{ki} = g^{\frac{1}{2}} (\nabla^i \nabla_{[k} L_{j]i} + \frac{1}{2} C_{kji h} L^{jh})^2; \quad g = \text{Det}(g_{ih})$$

verschwindet.

Die Tensordichte \mathfrak{G}_{ki} verschwindet nicht identisch und ihr Verschwinden ist eine zwar notwendige aber nicht hinreichende Bedingung dafür, dass sich die X_4 konform auf eine Einstein- V_4 ($K_{ih} = \frac{1}{4} K g_{ih}$) abbilden lässt.

Tritt dieser letztgenannte Fall ein, so lässt sich für die Bildung der H_5 eine Vorschrift angeben, derart dass zwei nach dieser Vorschrift konstruierte H_5 „nicht wesentlich verschieden“³⁾ sind.

¹⁾ Über allgemeine konforme Geometrie in projektiver Behandlung I, Proc. Kon. Akad **38**, (1935), 706—708

²⁾ Vgl. für die Definition von $C_{kji h}$ und L_{ji} : J. A. SCHOUTEN, Der Ricci-Kalkül, Springer, Berlin, S. 170.

³⁾ Vgl. unsere oben zitierte Mitteilung, S. 706, Fussn. 3).

Chemistry. — *Valency-shifting in cyclanes.* By J. BÖESEKEN.

(Communicated at the meeting of December 21, 1935).

As is well known, V. BAEYER on the ground of VAN 'T HOFF's hypothesis assumed that energy is required to make the binding units of carbon deviate from their normal direction. Consequently a tension directed outward would exist in the unsaturated bonds and in the saturated C three- and four-rings, no tension would be found in the C five-ring, and in the higher rings there would be a tension directed inward which would increase with the number of C-atoms of the ring. This tension theory of V. BAEYER indeed gave an elegant explanation of the fact that there was a preference for the existence and formation of five- and six-rings.

In this hypothesis it was assumed that in all rings the carbon atoms were situated in the same plane.

Thus far the only sure method to determine this ring tension is measuring the heat of combustion and comparing this with that of the saturated, not ring-shaped, hydrocarbons.

It appeared that indeed in the double bond and in the three-ring a surplus per CH_2 -group was found, in the four-ring this value was uncertain, in the six- and higher rings not a trace of an increment was observed.

Now it might be assumed that either the deviation of the valencies does not take any work worth mentioning or that in the higher rings the C-atoms are not situated in the same plane, which enables the valency directions to remain constant. The latter assumption is now finally accepted, the possibility of the existence of non-flat rings with retention of the constant angle of $109^\circ 28'$ already being elaborately expounded by SACHSE¹⁾. The first *experimental* proof was given by the absence of a positive influence of the cis-cyclohexane diol 1.2 on the conductivity of boric acid, whereas this was very large in case of cis-cyclopentane diol 1.2²⁾.

Absolute certainty was obtained by the finding of the acetone compound of the trans-cycloheptane diol 1.2 by DERX³⁾ (and actually even before that by the isolation of the anhydride of the trans-cyclohexane 1.2 dicarbonic acid by V. BAEYER).

Owing to the excellent researches of W. HÜCKEL⁴⁾ on the dekalenes

¹⁾ Zeitschr. physikal. Ch. **10**, 203 (1892).

²⁾ J. BÖESEKEN and J. V. GIFFEN, Rec. Trav. chim. **39**, 183 (1920).

³⁾ Rec. Trav. chim. **41**, 340 (1922).

⁴⁾ W. HÜCKEL, Ann. **441**, 48 (1925) **451**, 117 and 131 (1926).

and their derivatives a whole series of compounds has become known of non-plane six-ring systems.

From this may be concluded with certainty that in the saturated rings with six or more carbon atoms there is no tension since the ring-forming atoms have sufficient space to keep the angle of 109° between their valencies constant.

Now how is it with the rings of five or less atoms? If indeed work is required to turn the valencies outward, this must appear from the properties of the compounds, in comparison to those of the non-ring-shaped molecules and of the ring-shaped molecules of five or more C-atoms.

Already some years ago we stated in which way we succeeded in demonstrating the existence of a *peculiar condition* in the *four-ring* and the absence of deviations in the rings with five or more C-atoms⁵⁾. Since we have meanwhile improved and completed this investigation, we refer to it once more. We made use of the effect of boric acid on the conductivity of a series of cyclane 1.1 hydroxy acids, which mutually differ only in size of the ring, and compared this with the same effect in a number of non-cyclic α -hydroxy acids.

From the boric-acid investigations, and especially from those carried out in collaboration with Dr. VERMAAS⁶⁾, we know that the *value* of the increase of conductivity is mainly due to the amount of complex acids formed from one mol boric acid with two molecules of the polyol (in this case of the α -hydroxy acid) and further that this more or less easy formation is almost exclusively dependent on the position of the hydroxyl groups in space.


Consequently a difference in the value of this increase is here due to a difference in position of the hydroxyl and the carboxyl group and, since these are bound to the same carbon atom, to the angle between the valencies concerned.

The cyclic 1.1 hydroxy acids might be compared with the di-substituted glycollic acids and thus for the increment of conductivity of a normal solution to 0.5 m. H_3BO_3 we find the following numbers expressed in KOHLRAUSCH-HOLBORN units $\times 10^{-4}$ and measured at 25° .

1.1 hydroxy acid of	Δ mol	$K_{25} \times 10^4$	Observations
Cycloheptane	960	0.94	
Cyclohexane	980	0.76	
Cyclopentane	970	0.78	

⁵⁾ Rec. Trav. chim. **51**, 159 (1932).

⁶⁾ Rec. Trav. chim. **51**, 67, 955 (1932).

Cyclobutane	125	1.09	
Cyclopropane	66	0.46	
Average value of some di- substituted glycollic acids }	800—1100	1.07	Dimethyl glycollic acid
		1.24	Methyl-ethyl glycollic acid
Fluorene hydroxy carbonic acid 	580	11.8	

In the fluorene hydroxy carbonic acid likewise a deviation has been stated. This, however, is a derivative of a non-saturated five-ring. We shall refer to it again in our second communication.

It is clear that in the acids with saturated rings of five or more C-atoms no difference of any importance has been found and that the value corresponds with that of the comparable non-ring-shaped glycollic acids. Of any deviation as the result of ring closure nothing is to be observed. On the other hand this is indeed the case with the acids with rings of less than five atoms; the values obtained here are considerably lower, indicating a peculiar condition in these rings which is more pronounced in the three-ring than in the four-ring.

From the more unfavourable position of the OH and COOH groups we should not conclude that they are more widely apart in the four- and three-ring than in the other hydroxy acids; it might be that they lie more closely together. The former possibility, however, is more likely, since the decrease of the angle between the ring-valencies leaves a larger surface of the C-atom for the binding of the OH and COOH groups and these consequently by mutual repulsion may be placed more widely apart.

In the glycollic acid itself and the mono-substituted glycollic acids we likewise find a much smaller increase of conductivity. Considering the small mass of the H-atom, a spreading of the other groups is comprehensible. By means of an exacter observation of the cyclobutane hydroxy carbonic acid and the addition of the most simple cyclo-acid, cyclopropane hydroxy carbonic acid, may now with greater certainty be concluded that the saturated rings with five and more C-atoms are completely comparable with non-ring-shaped molecules and that in those with less than five C-atoms a peculiar condition is found, which in the three-ring, as might be expected, is more considerable than in the four-ring. On former occasions I have taken this for a result of the ring *tension*. However, we know nothing of the energy condition between the hydroxy acids and boric acid. For this reason it will be safer to speak of *valency-shifting owing to ring closure*.

Delft, December 1935.

Chemistry. — *Tautomerism of butadiene sulphone.* By J. BÖESEKEN and E. DE ROY VAN ZUYDEWIJN.

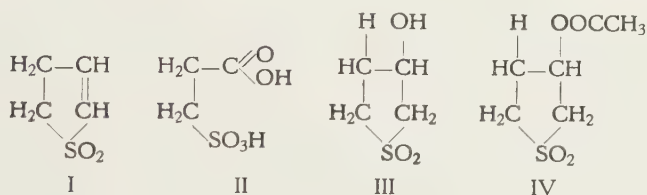
(Communicated at the meeting of December 21, 1935).

As we have communicated before ¹⁾, butadiene sulphone in the presence of $\frac{1}{2}n$ KOH is in tautomeric equilibrium with isomer I. The melting-point of the pure isomer is 48,5°—49,5°; the constitution was proved by ozonization in chloroform-water ²⁾, when the acid II is formed.

The α -butadiene sulphone is not oxidized by per-acetic acid and cannot be bromized in an organic solvent. As in α -isoprene sulphone, however, the latter reaction appears to be possible in aqueous solution; here a dibromide is formed.

During the reaction between butadiene sulphones and KOH there is besides formed, by addition of H—OH to the double bond, the highly hygroscopic hydroxy compound III (melting-point c. 35°, boiling-point 140°—145° in cathode vacuum). By means of acetylation may be obtained from III the acetate IV (melting-point 74°—75,5°).

From the hydroxy compound III, by means of illumination in the presence of KOH, no α - or β -butadiene sulphone is formed. The tautomeric conversion of butadiene sulphones consequently does *not* take place by introduction and separation of H—OH, as BACKER and STRATING ³⁾ supposed.



Further particulars concerning this investigation will be published elsewhere.

Delft, December 1935.

¹⁾ J. BÖESEKEN and E. DE ROY VAN ZUYDEWIJN, *Proc. Kon. Akad.* **37**, 760 (1934).

²⁾ E. DE ROY VAN ZUYDEWIJN and J. BÖESEKEN, *Rec. trav. chim.* **53**, 673 (1934).

³⁾ H. J. BACKER and J. STRATING, *Rec. trav. chim.* **54**, 618 (1935).

Anatomy. — The character and spread of associated cephalic and cranial index peaks in Africa. By C. U. ARIËNS KAPPERS.

(Communicated at the meeting of November 30, 1935).

Before discussing the African index curves I want to express my thanks to those who helped me in getting the numerous individual data registered in my tables. I am specially indebted to our African explorer Dr. P. JULIEN for his large series of Pygmy indices, indices of Ituri negroes, of the Mendé speaking tribes of Sierra Leone and Liberian autochtones and to his collaborators, Miss VAN ITERSOM, Mr. ROBERTS and Mr. VAN EEDEN for calculating these series. I also wish to express my thanks to our artist Mr. CHR. VLASSOPOULOS for copying my curves with his usual exactitude.

From Table I fig. 1 of my paper on the stability and variability of central and paleo-Asiatic index peaks,¹⁾ showing the cephalic index curve of the inhabitants of the southern corner of the Arabian peninsula, reproduced in the textfigure on p. 6 of my present paper it appears that the 79—81 and 83—86 peaks, so typical of Eurasia, north of the 40th parallel specially, also prevail with the population of this utmost south-western part of Asia. The 79 and 81 index peaks are most frequently found with paleo-Asiatic peoples, the 83 and 86 peaks with so-called Central-Asiatic ones.

The cephalic curves in Table I and II of my present paper show that such indices are rare in Africa, even on the African shores of the Red Sea (cf. also KLIMEK). With SELIGMAN's Beni-Amer (Fig. 1), living between the Nile and the Red Sea, only a small 79 peak and some 81 and 83 indices are registered. Also some of the higher indices of his Hadendoa and Amara²⁾ (fig. 17), and the 81 and 84 elevations of CHANTRE's Bichareyeh (Bedja) (fig. 24) may have to be partly explained in this way, though Sudanese admixtures have to be considered here first of all.

Dolichocephalic Peaks.

With North and North-East African peoples the most frequently occurring peaks are the cephalic 73 and 75 (cranial 71 and 73) peaks.

This, together with the fact that the 79—81—83—86 indices, are rare, even in those regions that lie nearest to Asia, shows that the population of North and East Africa developed during millennia along its own lines (for Madagascar, see footnote 1 p. 40). Probably these people are derivatives of the Caspian inhabitants of these regions, who again are closely related

¹⁾ These Proceedings, Vol. 38, 1935. Table I, fig. 1.

²⁾ Also SELIGMAN himself (1930, p. 104) states an Armenoid component in these peoples, specially with the Hadendoa groups. The Beni-Amer still speak a Semitic language (Tigre). The Hadendoa group does not, but the Abyssinian Amharas (dotted line fig. 17) also have a Semitic language. Since also Sudanese elements are very numerous here, this region is a mixture of Hamitics, Sudanese and (less) Semites and Armenoids.

to the upper paleolithic peoples of South-West Europe, who may be considered as their European branch. The cranial indices of the latter (cf. Table III, fig. 1), though having a considerable spread¹⁾, show a 71 and 73 cranial index peak, corresponding approximately with the 73 and 75 cephalic peaks prevailing in North and East Africa and on the southern borders of the Sahara, as far as Senegal.

The Beni Amer (Table I, fig. 1) near the Red Sea show an outstanding cephalic 73 peak. The same is observed with the very dark (Negroid) Buduma of Lake Chad, measured by TALBOT (fig. 2). With CHANTRE's Egyptian Copts from Luxor²⁾ (dotted line fig. 3), as with the male Egyptians, measured by myself (continuous line fig. 3), the 75 peak is the most outstanding one. Similar relations are found with HRDLICKA's Egyptians from the Kharga oasis (continuous line fig. 4). With CHANTRE's Egyptian Beduins (dotted line in the same figure) the 73 and 75 peaks are about equally high.

The cephalic index by far prevailing with MYER ORENSTEEN's male Egyptians from Assyut and Assuan as well as with MYERS' male Delta Egyptians (fig. 16) is 74, i.e. the mean of the cephalic 73 and 75 indices, so outstanding with CHANTRE's, HRDLICKA's and my Egyptians (figs. 3 and 4).

Unfortunately we have not at our disposal a sufficiently large series of individual indices of modern Egyptian skulls, but the broken curve of modern Egyptian skull indices, made after the data of SYDNEY SMITH³⁾, (Table III fig. 1), shows that with this small but reliable series of modern Egyptian skulls the cranial indices 71 and 73, corresponding⁴⁾ with the cephalic 73 and 75 indices, are the most outstanding ones. I grouped this curve with those of the predynastic and dynastic Egyptian skulls to show that similar indices already prevailed in ancient times.

The cephalic 73 peak again prevails with the autochtones of N.W. Tunisia, recorded by BERTHOLON (fig. 5, continuous line), as well as with the Negroid Haussa on the southern border of the Sahara, measured by TREMEARNE, and indicated in the same figure by a dotted line. Both curves also have an additional 75 peak. GIRARD's Malinké and Bambara, west of

¹⁾ In addition to the upperpaleolithic skulls registered in the crossed line of Table III, fig. 1, there are two with a 65 and one with an 85 index.

²⁾ Of MÜNTER's 64 Coptic skulls only twelve have an index of 73 and 74. With the others the 78 and 80 index is the most prevailing one, showing an admixture with another, probably a paleo-Asiatic group. Since in the curve of SCHMIDT's Pompejan skulls the outstanding peaks are 77—80 (and 83), they might be a European import (see also MORANT, note 1, p. 44 of this paper).

³⁾ I am greatly indebted to Dr. MORANT for sending me these data, based on more reliable material than those recorded by E. SCHMIDT.

⁴⁾ According to DERRY, CHANTRE, MYERS, and CRAIG the average difference between the cranial and cephalic index in this people is about 2 points. This is confirmed by a comparison of the Egyptian cephalic curves (Table I, figs. 3 and 4) with the cranial curves in Table III, fig. 1.

the Niger (dotted line fig. 6) and COUVY's Bulula-Kanuri (continuous line) have a 73 peak. The latter have an additional 77—78 peak, also occurring in my Egyptian curve of fig. 3 (about this peak see p. 38).

With the Kanuri, Kanembu and Kotoko Sudanese, measured by TALBOT (thin curve fig. 5), especially with the Batutsi and Wanyamwesi, S. E. of Victoria Nyanza, measured by CZEKANOWSKI, with LEYS' and JOYCE's Wanyamwesi (figure 7), and even with JULIEN's Mendé tribes of Sierra Leone (combed line) the 75 peak is again outstanding.

Reviewing the curves hitherto mentioned, we may say that the 73 and 75 peaks have a large spread in the northern and southern borderlands of the Sahara and in East Africa, though in other anthropometric relations as well as in pigmentation considerable differences exist between the peoples north and south of the desert.

Probably the cephalic 73 and 75 peaks are associated i.e. genetically related index peaks, similarly as 79 and 81 are associated paleo-Asiatic and 83 and 86 associated Central-Asiatic index peaks. That sometimes the 73, sometimes the 75 peak prevails is analogous to the prevalence of either of the associated paleo- or Central-Asiatic peaks with Eurasian peoples.

However, under certain, probably environmental conditions, a more dolichocephalic variation may arise. So an additional elevation of the 71 index is observed with CHANTRE's Egyptian Copts and with my Egyptians (fig. 3), similarly with the Tunisians (fig. 5) north of the Sahara and with the Kanuri, Kanembu and Kotoko tribes, south of the desert (thin curve fig. 5).

That this peak is a variation of the 73 one is made probable by the Tuaregs, who live on the southern border of the desert. Fig. 8¹⁾ shows the curious fact that the Tuaregs measured east of Agades by DE ZELTNER (continuous line) have a prevailing 73 index, while with those measured near Gao by VERNEAU (dotted curve) the 71 index is outstanding.

Probably this variation may be correlated with a leptosome condition, caused by special environmental or endocrine conditions²⁾. In favour of this interpretation Nilotic tribes such as the Denca and Shilluk may be quoted. With the extremely tall, leptosome Denca and Shilluk, measured by TUCKER and MYERS (continuous line fig. 12a) the 71 peak stands out, with MOCHI's Denca (dotted line) even a 69 peak³⁾, while their nearest relatives of the Tanganyika districts (fig. 12) usually have a somewhat higher index (72). Of ROSCOE's Uganda people (Baganda⁴⁾, thin continuous curve fig. 12a) the 71 index group may be closely akin to them.

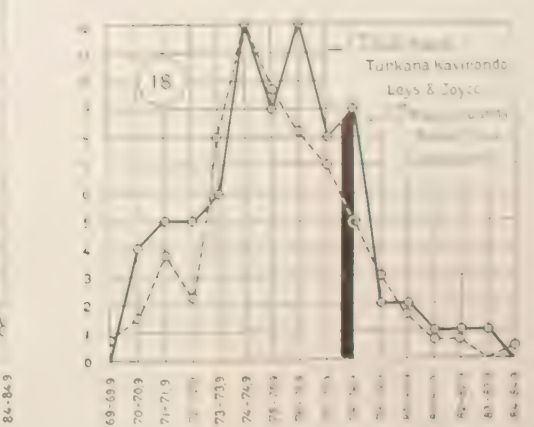
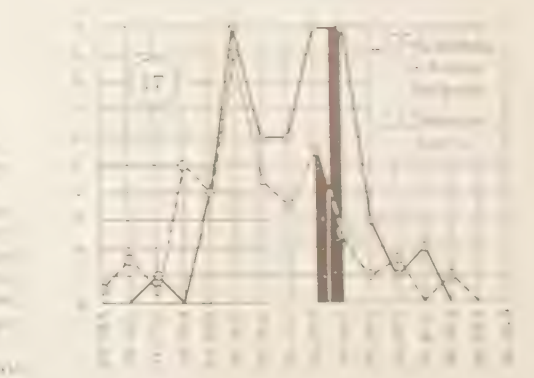
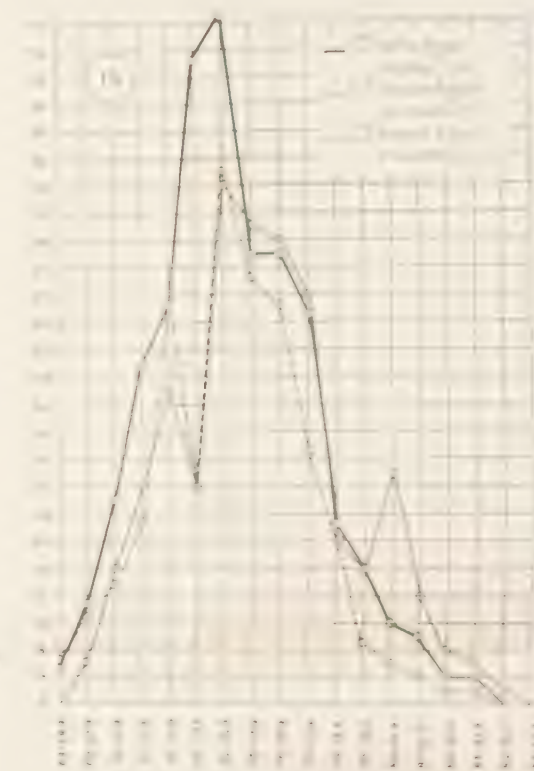
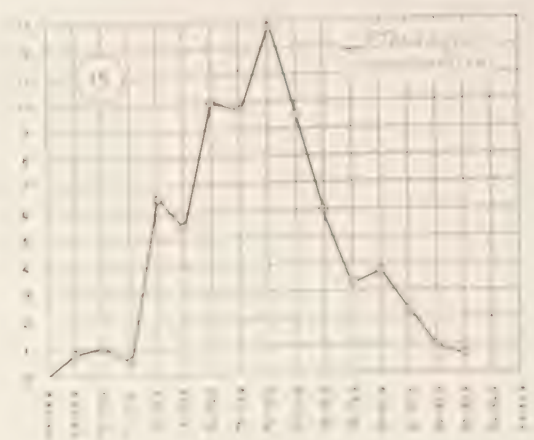
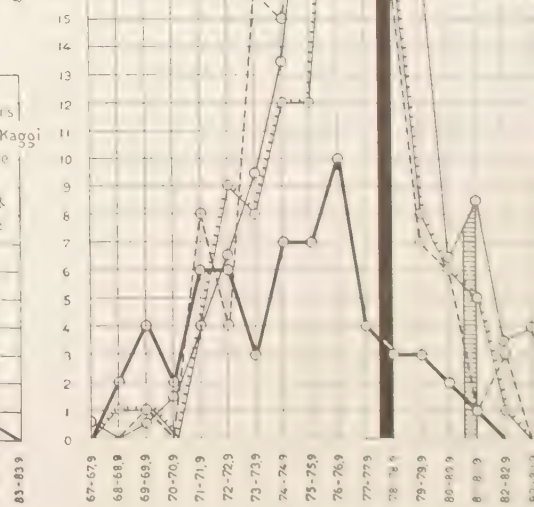
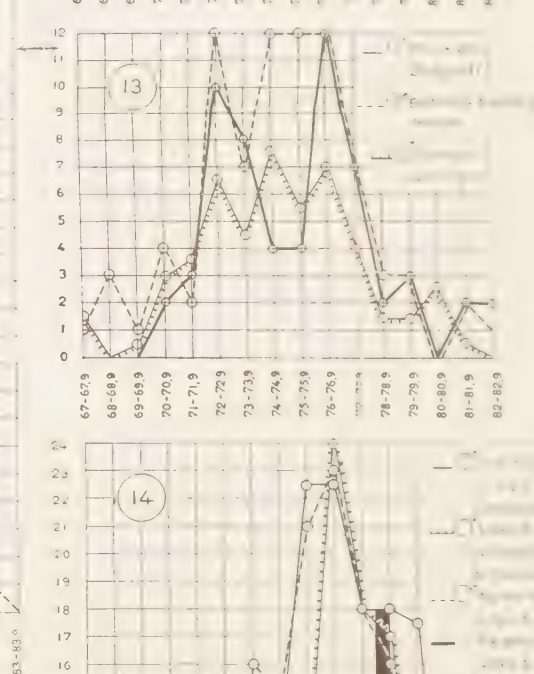
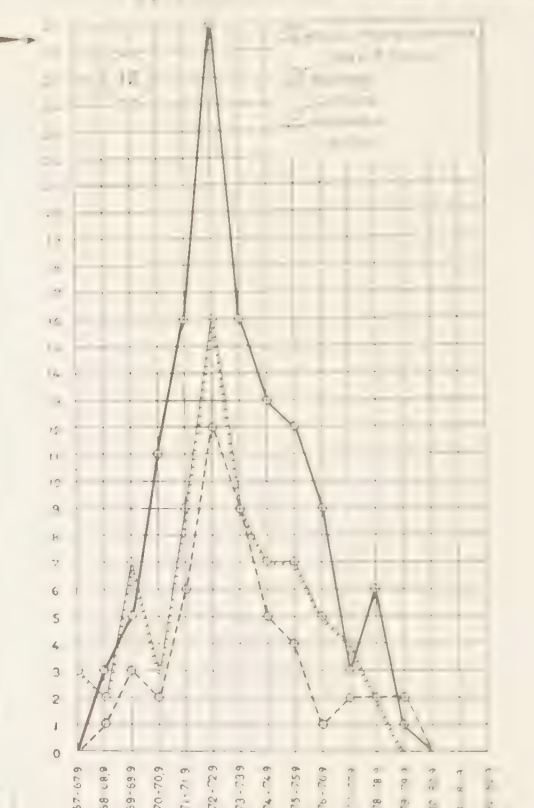
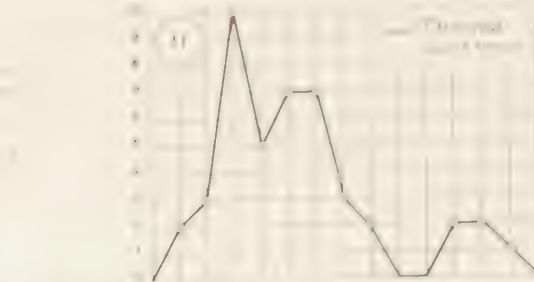
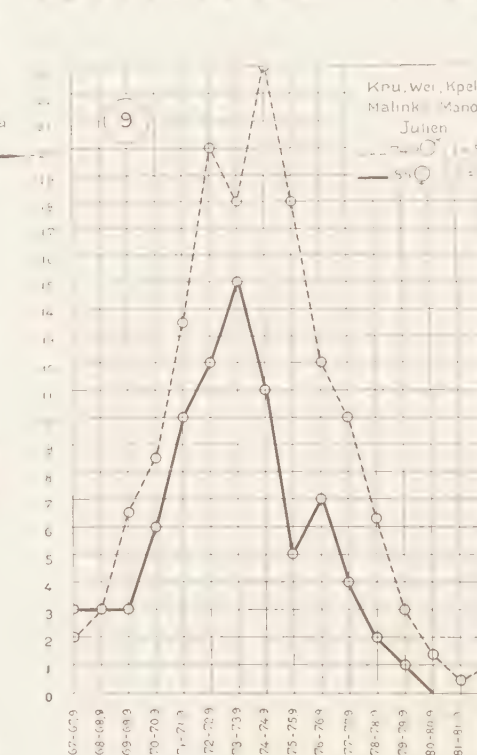
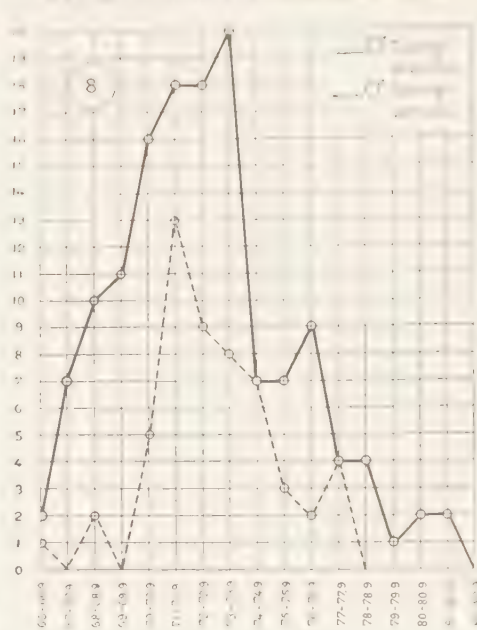
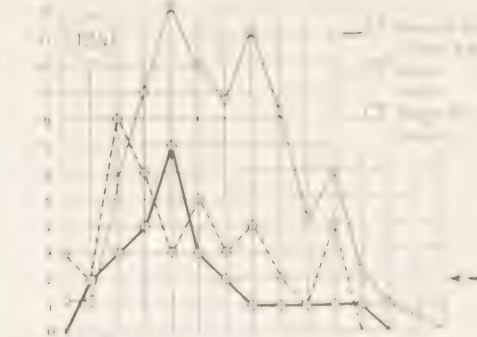
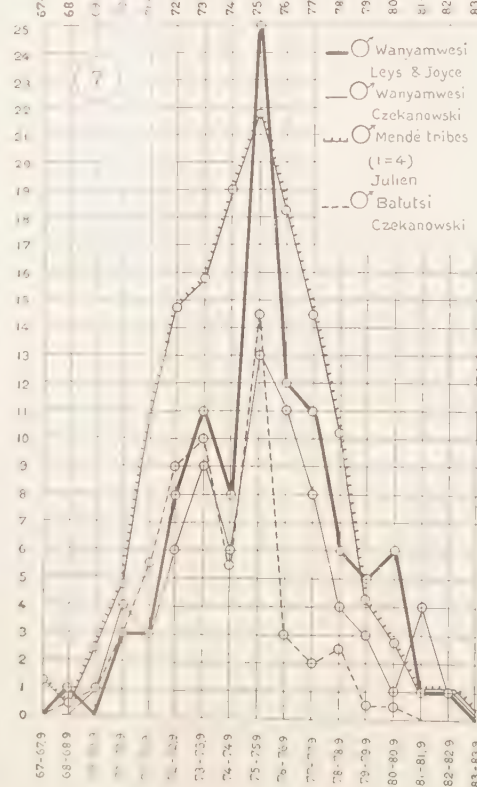
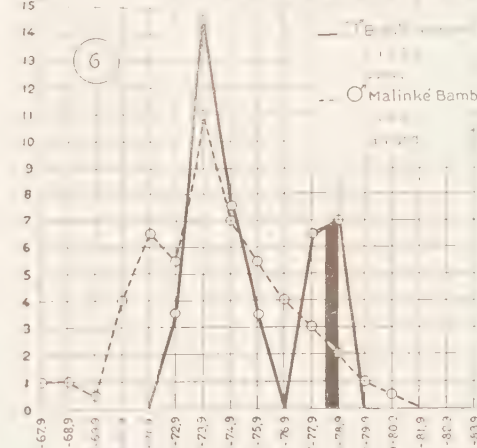
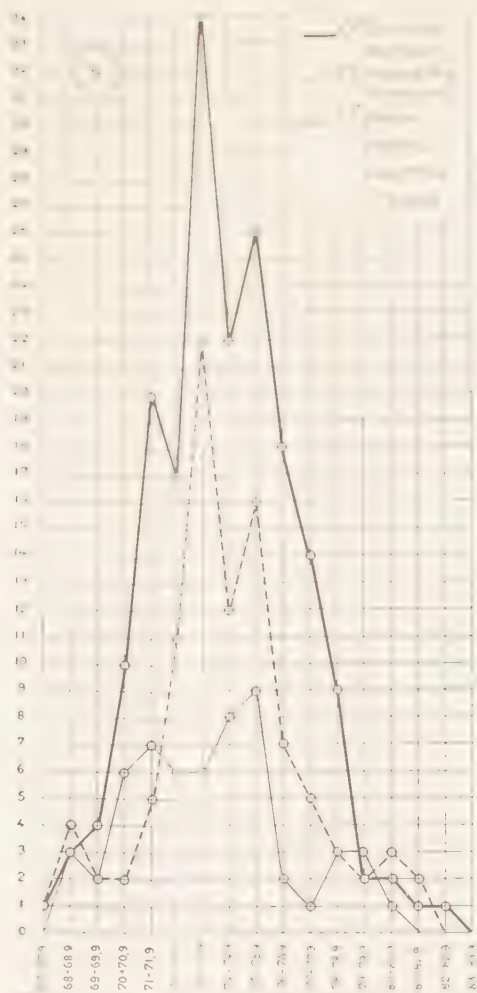
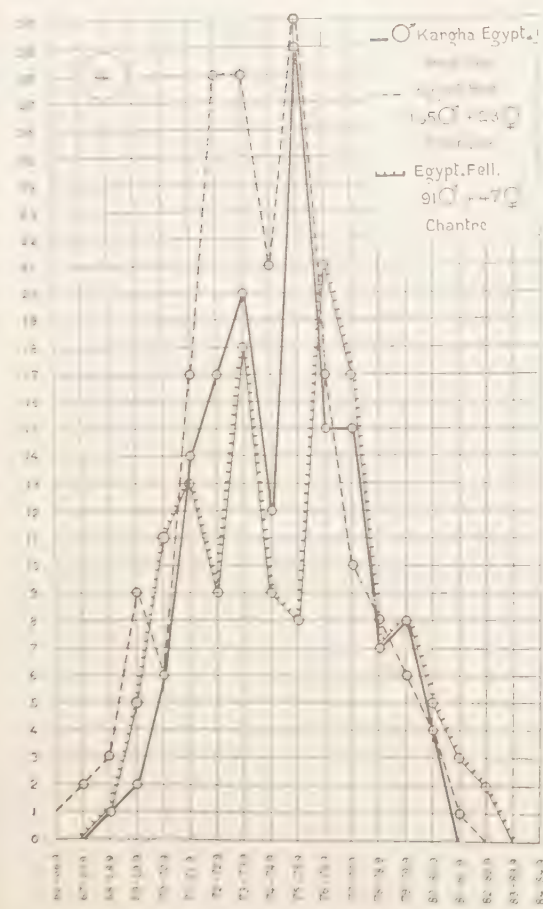
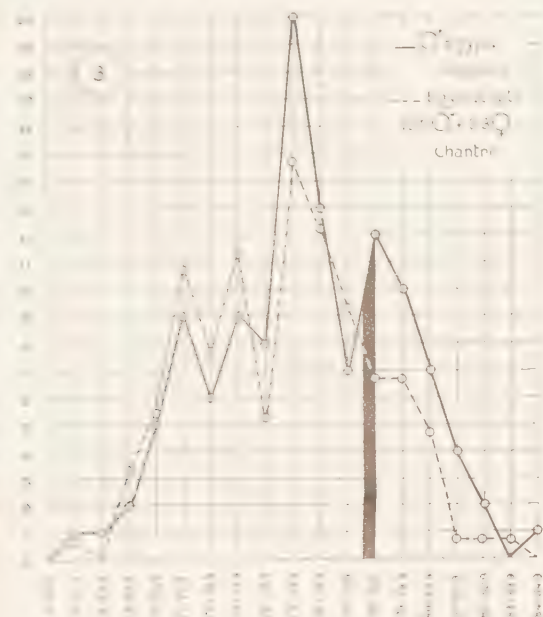
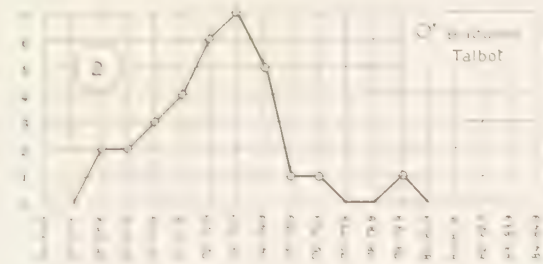
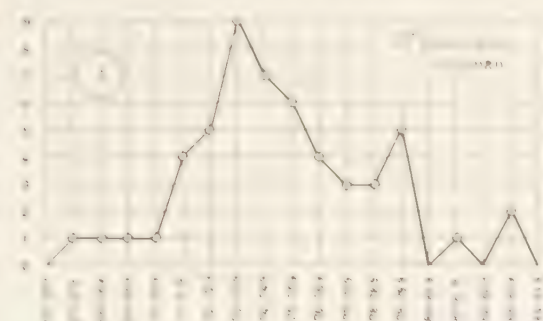
¹⁾ In this figure only the indices recorded by DE ZELTNER and VERNEAU (nobles et vassaux) are recorded. LE BLANC's indices of the Haggar Tuaregs show such a wide range that they certainly do not represent a pure group.

²⁾ As already pointed out in our Introduction to the Anthropology of the Near East p. 173, such a low index peak also occurs with some Indo-Aryan groups, living under poor conditions, especially with the Chuhra Panjabi (Pariah).

³⁾ The Denca indices recorded by SELIGMAN and PIRRIE show an almost equally distributed curve between 68 and 75, with a slight elevation at 70.

⁴⁾ CZEKANOWSKI's 32 male Baganda also have the highest cephalic peak at 71.

Table I cephal. indices



1

2

3

4

5

6

7

8

9

With the Egyptian Fellaheen, measured by CHANTRE near Luxor (combed curve, fig. 4), the 71 peak is still indicated although the 73 peak is a good deal higher.

With these Fellaheen a high 76 peak occurs, which is also outstanding with CZEKANOWSKY's Lur and Logo tribes, DE SCHWEINITZ' Lake district people and LEYS' and JOYCE's Akamba and Nyika tribes (fig. 14).

That this 76 peak in many cases may be considered as a variation of the 75 peak is suggested by its frequent combination with a 73 peak, e.g. with the Eastern Kagoro and Kaggi Nigerians of TREMEARNE (dotted curve in fig. 10) and the Somalis recorded by PUCCIONI, RADLAUER, SANTELLI, HILDEBRANDT, LEYS and JOYCE (thick continuous line fig. 10). Also the male Zulus (Southern Bantus), indicated in the same figure by a combed line, show this combination and so do WOLF's and MENSE's Bangala measured near LEOPOLDVILLE (fig. 11), contrary to the real Bangala of the middle Congo, measured by JACQUES (fig. 26). The fact that in fig. 11 and with the Lur and Logo of fig. 14 the 75 elevation is equally high as the 76 one speaks in favour of this viewpoint. That the 76 peak is very common in the West Sudan as well as in East Africa appears from figs. 13, 14 and 21.

With LEYS' and JOYCE's Masai, Njemps and Kamasai (continuous line fig. 12) and with CIPRIANI's Batongo (dotted line), also with SCHULTZE's Hottentots (combed line in the same figure), another index prevails, the 72 peak being the only one. This peak may correspond with the 70 cranial index elevation of MISS KITSON's ¹⁾ male Teita skulls (strong line Table III fig. 3) from Kenya and RIED's male Ssandaui, Turu, Burungi, Kindinga and Issansu skulls from German N. E. Africa (thin line in the same figure).

The Masai, Njemps, Kamasai and Hottentots have or had (Hottentots) an important center in the Lake district. The Baganda and the still more dolichocephalic Nilotics as the Shilluk and Denca (fig. 12a) may also belong to their relatives. The Masai, Djemps and Kamasai, together with the Turkana, Nandi and Suk are called semi-Hamites ²⁾ by SELIGMAN (Neo-Negrids by VON EICKSTEDT). They offer a difficult problem to classification (cf. also RIED).

That in historical times secondary mixtures with Hamites have occurred (SELIGMAN) is doubtless, also that these groups also have secondary affinities with the Southern Bantu and even (the Kindinga) with the Pygmies (see below) according to RIED. I doubt, however, considering also Miss KITSON's work on the Teita skulls, if it is right to

¹⁾ *Biometrika* Vol. 23, 1931, p. 271.

²⁾ I would rather reserve this expression for the mixed Hamitic and Central-African groups, whose mixture clearly appears from a combination of 73—75 with 77 (78) peaks (figs. 20—25). In this sense the Kavirondo also belong to the Semi-Hamites. SELIGMAN groups them with the Nilotics on account of their language. Anthropometrically, however, they stand nearer the Suk, Turkana and Nandi (fig. 18). This remark does not imply of course that the dolichocephalic Masai and related tribes have no Hamitic admixture, at all. But as far as their index is concerned they seem to be rather related to the 71 index Baganda and to the Shilluk and Denca than to the Turkana, Nandi and Suk.

consider the Masai c.s. as mere mixtures of neighbouring groups. The homogeneity of their indices certainly does not plead for it; on the contrary their very constant male 72 cephalic (70 cranial) peak seems to show that apart from later admixtures they contain a definite stock of their own, that, considering the very ancient dolichocephalic skulls found in these regions (LEAKEY), may be far more fundamental for anthropology than is usually thought.

This and the fact that also the Hottentots seem to be related to this group raises the question if these peoples are not closely akin to a very ancient stock, from which other groups (now far more important) developed. The fact that this group by its location forms so to say the knot, meeting place (or place of issue?) of the Hamites, the dolichocephalic Nilotic elements and the Southern dolichocephalic Bantu, raises the question if these three dolichocephalic streams may not have had their earliest African centre in this region.

That later they mixed again, especially with more differentiated Hamites north to them, and Bantu tribes west and south, is to be expected, considering their topography, but this should not make us blind to the homogeneity in the groups of fig. 12, their index curve showing far less mixture than e.g. the Sudanese tribes. I therefore believe that neither the expression Semi-Hamites nor the expression Neo-Negrids is the most appropriate for the Masai c.s. I shall return later to some genetical questions that may be raised — but not yet answered — in connection with this people.

That the 72 cephalic peak, though most characteristic in the Eastern Lake district, does not fail in the West Sudan is shown by ZINTGRAFF's Kru and Wei Negroes (thick continuous line fig. 13), JULIEN's Kru, Wei and Malinké (fig. 9) and WENINGER's Senegalese (thin continuous line fig. 13). Even MENSE's Bateke and Bakongo measured near Leopoldville¹⁾ (dotted line figure 13) show a distinct 72 peak. In all these groups it is combined with a 74 and especially with a 76 peak, which peaks are also frequent in East Africa, e.g. with LEYS and JOYCE's Suk, Nandi, Turkana and Kavirondo (fig. 18). With the Eastern Akamba and DE SCHWEINITZ' Lake district people (fig. 14) the 76 peak even is the only outstanding one²⁾.

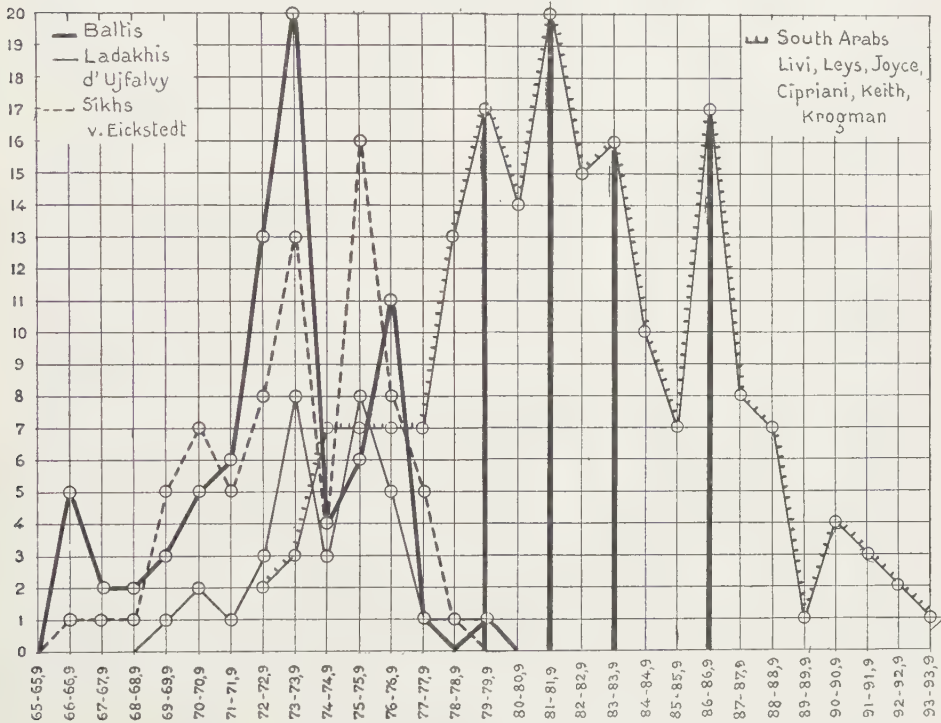
The spread of the (72) 73—75 (76) cephalic index peaks hitherto discussed corresponds almost exactly with the spread of the prehistoric Capsian culture, especially with the extension of the "Klingenkultur", as

¹⁾ With the peoples on the left bank of the Lower Congo, and further south on the West coast in Angola and formerly German West Africa (Ovamba and Herero) dolichocephalic indices again prevail.

²⁾ Cephalic 72 and 76 peaks also occur with MYER ORENSTEEN's Egyptians (fig. 15 and 16). However, while the 72 peak occurs with all his three Egyptian groups (i.e. with the people of Alexandria, Assyut and Assuan) it is the lowest in these curves. It even fails in the thick continuous curve of fig. 16 made after MYER's measurements in lower Egypt. The 76 peak is only pronounced with MYER ORENSTEEN's Egyptians from Alexandria (fig. 15). So many influences have acted during ages on the population of this town that it is difficult to know the reason of the rise of the index with its Egyptian inhabitants. That this is not necessarily due to urban life (often claimed as causing a rise of the index, or as a factor in the selection of higher index people) appears from the fact that the 76 index is also the highest one in CHANTRE's Egyptian Fellaheen (peasants) measured near Luxor (fig. 4).

described by MENGHIN¹⁾ and quoted by VON EICKSTEDT²⁾ (l.c. p. 616 fig. 444).

This culture extended from Spain along the African shores of the Mediterranean (including the S. Sahara borderlands) and further along the fertile Nile and Lake districts down to S. E. Africa. It was closely related to the upper-paleolithic culture of Spain, and may date as far backwards as 15—20,000 or more years B.C. The close correlation between the spread of this culture and the spread of the (72)73—75(76) cephalic index peaks in North and East Africa pleads in favour of a common origin of the North African and East African population and its relationship with the upper-paleolithic population of South-West Europe.



For the question of a North-Eastern (Asiatic) extension of these and related groups it is important to note that, apart from some South Palestinian and Transjordanian tribes³⁾, 73—75 index curves occur with the Indo- or Proto-Aryans (see the left hand curves in the adjoining textfigure).

Anthropological as well as ethnological data prove the relationship of the latter with early neolithic groups of the Aral-Caspian basin and of East- and Central Europe. As in

1) MENGHIN. Weltgeschichte der Steinzeit. Wien, 1931.

2) VON EICKSTEDT. Rassenkunde und Rassengeschichte der Menschheit. Stuttgart, 1934.

3) SHANKLIN has shown that with some Transjordanian tribes, Howeitats, the same index peak (73) occurs as with the Egyptians of Kena and Girga, from which it appears that this ancient Mediterranean type has a spread in this direction, either originally or as immigrants from Egypt.

upper-paleolithic times a distinct cultural relationship between these Eurasian regions and North-East Africa existed (MENGHIN), it seems quite possible that the Proto-Aryans and Hamites — however different at the present time — both are branches of a common upper-paleolithic stem that in the course of time has acquired such differentiations (and admixtures) that some of its recent branches impress us as rather divergent groups: as Proto-Aryans, Hamites or even as Negroids.

Meso-subbrachycephalic Peaks.

An additional 77—78 cephalic index is found in the Central and East Sudan (20, 21^b) with the Barabra (22), Bedja (25), Nuba (24), Amharas and Hadendoa (fig. 17), in the Lake (figs. 18 and 23) and in the Nyassa districts (fig. 19), where it occurs as an admixture to lower index peaks. As a prevailing group the 77—78 index is found in the Cameroon and Congo region (figs. 26—32), between the upper Congo and the upper Nile (CZEKANOWSKI: 24) and further East with the Suaheli (fig. 24).

The cephalic curves of fig. 6 and 17—25, especially those of East-Sudan and Ethiopia all show typical Hamitic admixtures by their additional, usually even prevailing 72 (73) and 75 (76) peaks (cf. also the Ethiopian skulls, Table III, fig. 4). The peoples registered in these curves apparently are mixtures of the dolichocephalic Hamitic race, discussed before, and pronounced mesocephalic non-Hamitic groups.

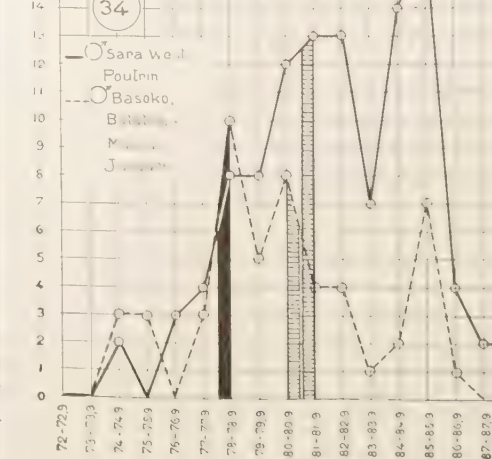
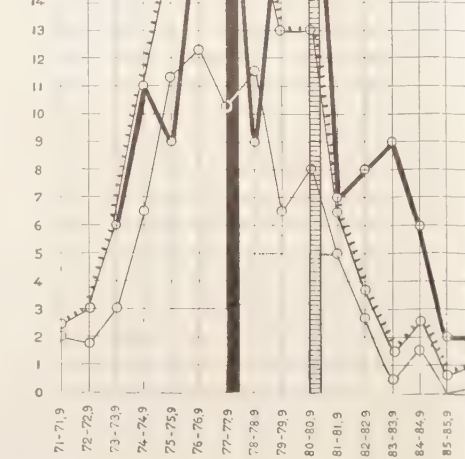
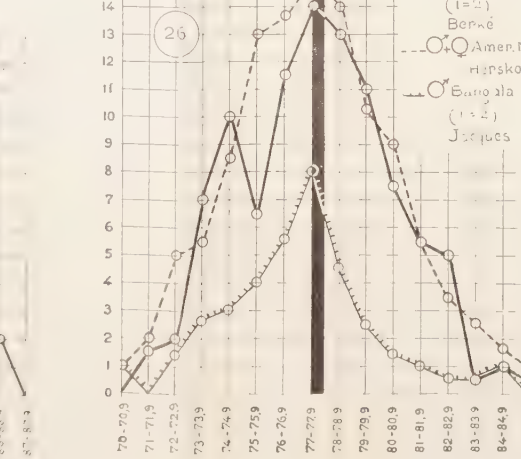
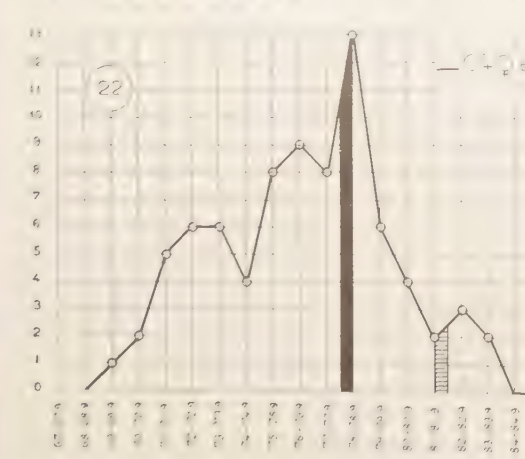
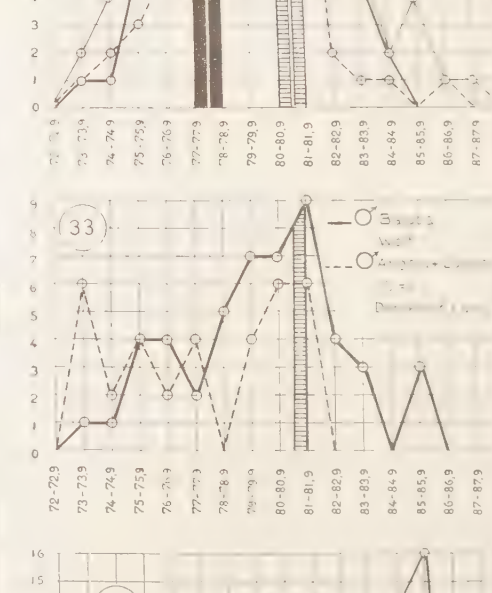
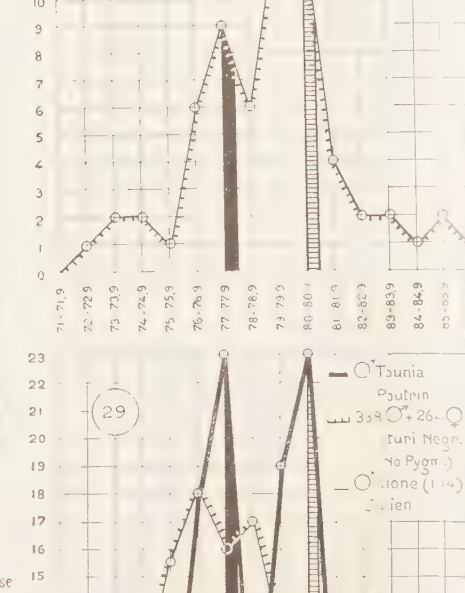
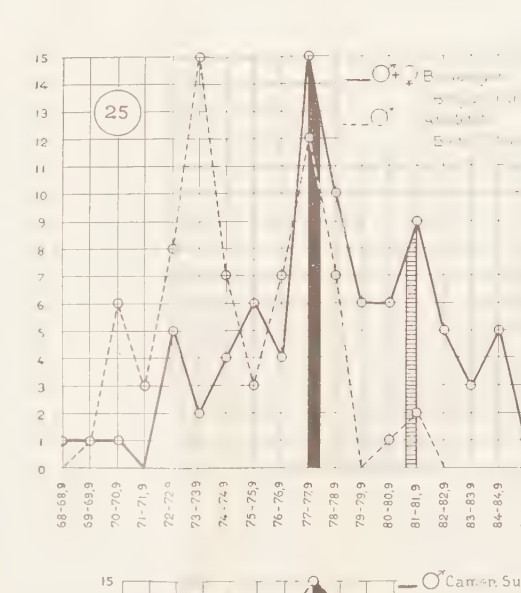
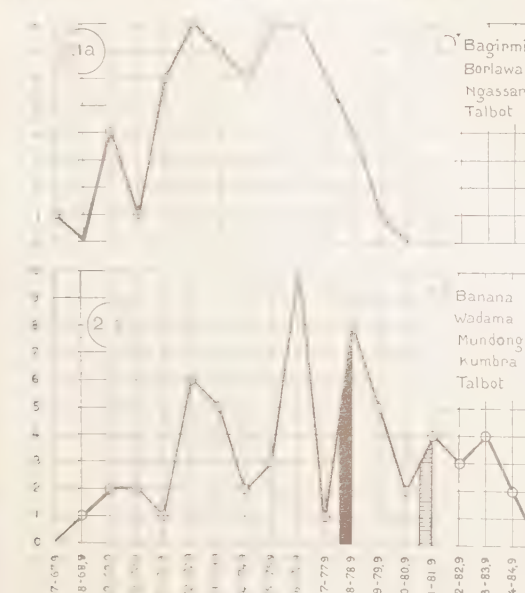
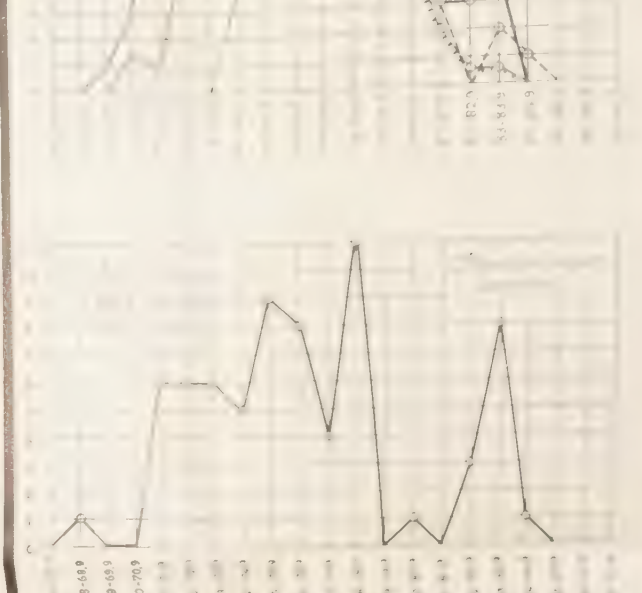
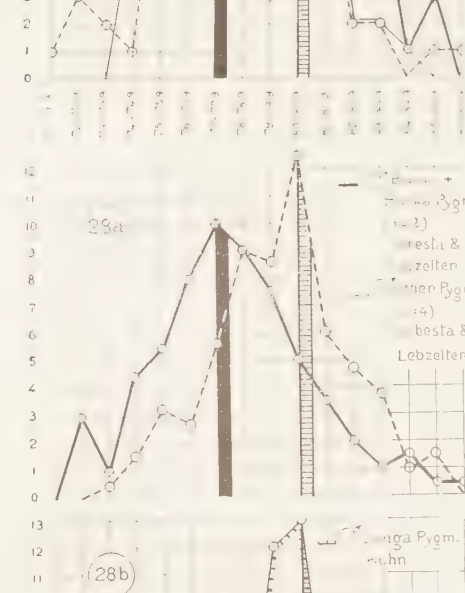
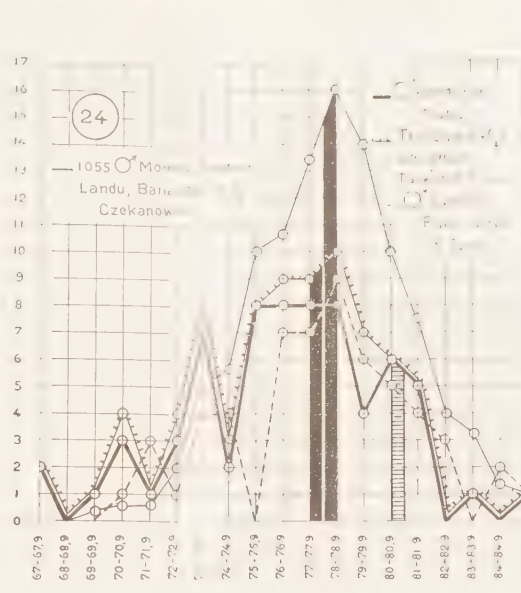
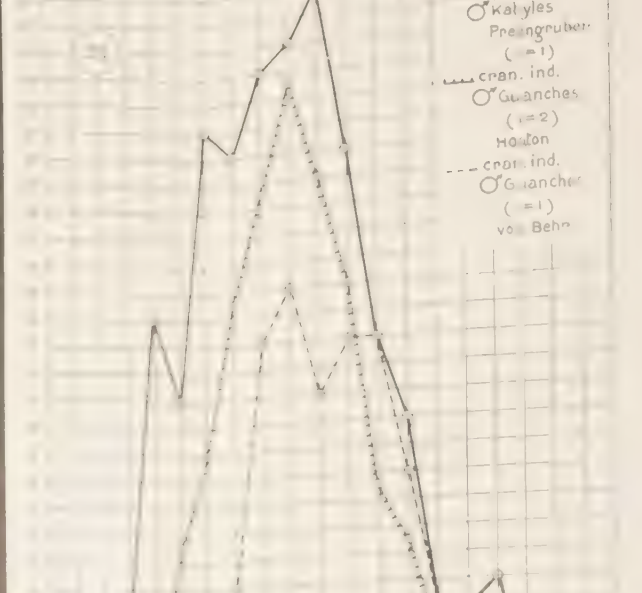
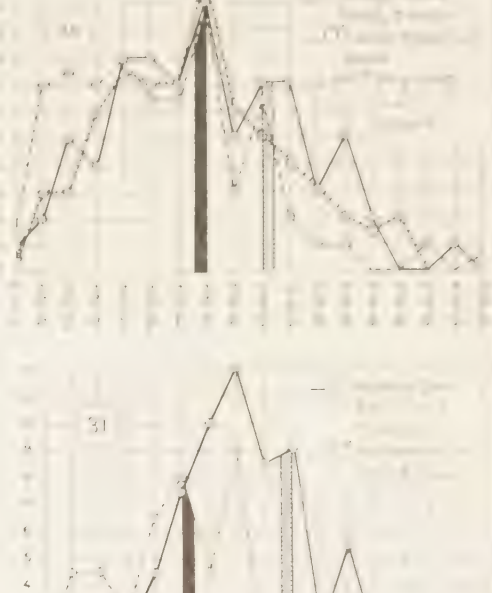
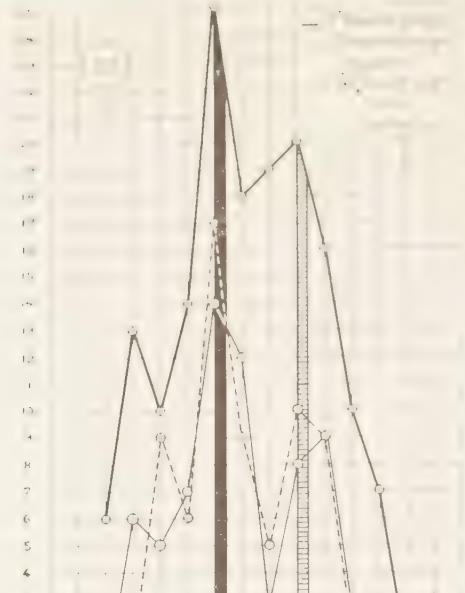
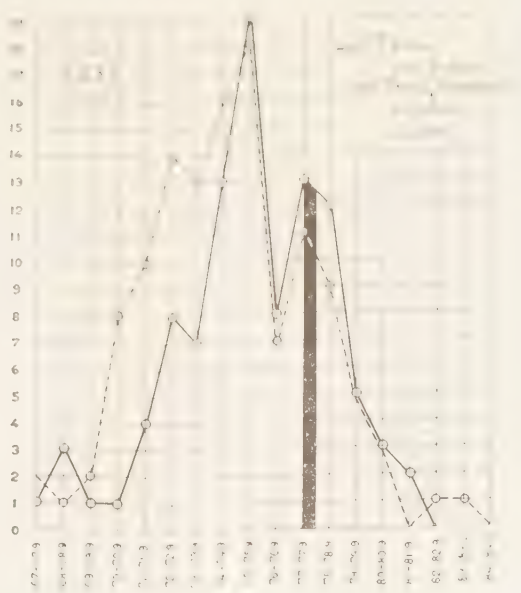
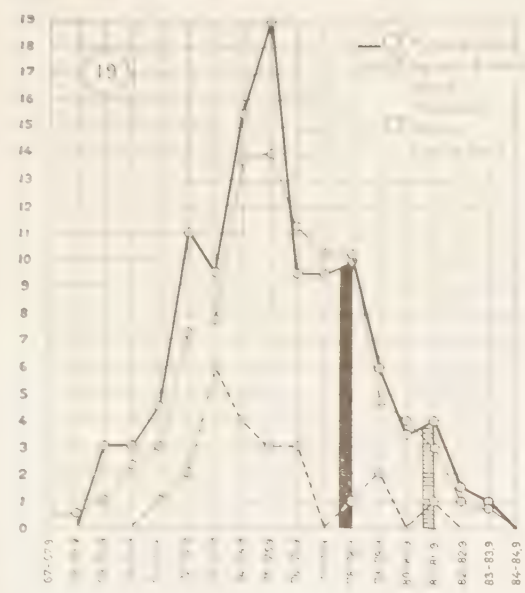
The same mixture is easily recognized in comparing CHANTRE's and my Egyptians in fig. 3, CHANTRE's people being purer Hamites than mine, with whom, in addition to the Hamitic peaks, a 78 peak occurs. (Some of the people I measured confessed to be "nous wa nous Masreyeh wa Sudan": half and half Egyptian and Sudanese). The Hamitic and non-Hamitic mixture is still more evident in comparing GIRARD's Western Malinké and Bambara with COUVY's Bulula—Kanuri (fig. 6) from the Tchad-region, which shows that a 77—8 admixture is rarer in the West than in Central and East Sudan. The Eastern Banana, etc. (21^b), Nuba (24), Barabra (22), Bedja (25) all show a 77 (78) peak together with 73—75 peaks. That an additional 77 (78) peak is more frequent in the Central and East Sudan and fails further away from the Congo in Nigeria (5), West Sudan (Senegal, the Wei and Kru country, fig. 13 and 9; see also JONES' Ashanti and Ibo skulls: Table III, fig. 3) pleads in favour of the Central Equatorial origin of this 77 (78) peak.

This is confirmed by the fact that it is the only outstanding peak with BERKE's Central Cameroon Sudanese ²⁾, JACQUES' male Bangala from the middle Congo basin (fig. 26), with SEBESTA's and LEBZELTER's male Basua and Bacwa Pygmies (continuous line fig. 28a) and with their female Pygmies (textfig. B, p. 42).

¹⁾ According to HERSKOVITS the Western and Eastern Sudan show also conspicuous cultural differences (Am. Anthr. Vol. 26, 1924).

²⁾ It also occurs with the American negroes, measured by HERSKOVITS (dotted line fig. 26) and originating from the coast and inlands of Guinea.

Table II. cephal. indices





In the figures 24, 25 and 27—34 in addition to this peak a 80—81 index peak occurs, also present in JULIEN's *Efé* (textfig. A p. 42) and KUHN's male Sanga Pygmies (fig. 28*b*). The mesocephalic peak, either alone or associated with a 80—81 peak, is so general, especially in the Congo, that we cannot avoid considering the Central and East Sudanese and Ethiopian groups as mixtures of Hamites and Central Africans (Northern Bantus), who in former times had a greater eastern extension.

That these mesocephalics are an ancient constituent in the African population appears from the fact that the 77 cephalic index and the corresponding 76 cranial index prevail with the Bushmen (textfigures C and D p. 42), who are supposed to be very primitive.

It has been frequently asked if the cephalic 77 (78)—80 index people arose on African soil or if it has a prehistoric or protohistoric Asiatic relationship, an alternative for which the more yellowish skin of the Bushmen and some Pygmy-groups, the occasional occurrence of an epicanthus (see AICHEL contra FRITSCH) and Mongol spot with the Bushmen have been advanced (cf. VON EICKSTEDT).

In favour of Asiatic relationships the extension of the 77—78 peak to the Red Sea may be advanced; furthermore the fact that in some circum-equatorial groups 79 and 81 peaks, so characteristic of paleo-Asiatic races, are very conspicuous. With LEYS and JOYCE's Kachamega and POUTRIN's East Sara and Kabba Bantu (fig. 31) the 79 peak is the most outstanding one. The same peak is indicated with the Grassland Negroes of Central Cameroon, measured by MALCOLM (fig. 32). An 81 peak is seen with the Central and West-Central Negroes, registered in figs. 30—34. Besides, the Tounia (fig. 29) as well as TORDAY's and KEITH's Congo Negroes (continuous curve, fig. 30) and POUTRIN's East Sara and Kabba (continuous line fig. 31) show that also the 83 index — so common in Asia — is not rare in the Congo districts. The Ba'amba (fig. 32), Baluba (fig. 33) Basoko, Batatela and Malela (fig. 34) even show a 85 peak, which in POUTRIN's West Sara is the highest (continuous line, fig. 34). These indices made R. B. DIXON classify those groups as paleo-Alpine.

Against an Asiatic origin of all these groups might be advanced that nowadays these peaks are most conspicuous with the Negroes in the Central and Western Congo districts and in the Cameroons, i.e. with such as live far away from the Asiatic shores. Yet, the frequent occurrence of an additional 78 peak near Port Sudan, in Abyssinia and with the Suaheli may raise the question of this eastern extension does not indicate the way along which these mesocephalics may have reached Africa from Asia ¹⁾.

Those who want to defend a prehistoric or protohistoric Eastern origin of these non-

¹⁾ Since the 77—78 index in the East Sudan might be explained as well by Arabic infiltration, this factor has to be regarded also. I believe, however, that the cultural influence of the Islam in these regions was greater than the anthropological one.

Hamitic groups might assume an earlier analogy with the generally granted Asiatic (Indonesian) immigration on Madagascar¹⁾ in historical times; and the fact that the Bantu-groups showing the Asiatic peaks mostly live so far away from the east coast, might be explained by a later wedging in of Hamitic and half-Hamitic tribes, who, spreading along the fertile countries of the Nile and Lake-districts, down to the Zambesi, obliged these Asiatics to retreat from the east coast in western direction.

Yet, the meso- and brachycephalic indices in the Central Congo-basin and the Cameroons, though giving peaks analogous to those on the Asiatic mainland, Indonesia and New Guinea may be as well explained by the fact that under special conditions analogous index peaks may arise in different countries and races (see also p. 43), or, in other words, that in its differentiation the human skull has a tendency to prefer certain relations between breadth and length, a feature also appearing from the great constancy of the 79, 81, 83 and 86 peaks with some Eurasian peoples, who have no direct relationship and who in other respects may show considerable differences. As stated elsewhere²⁾, the predilection of the same indices also appears in individual development. Besides the Semang (and some other Asiatic tribes) with analogous stature, features and indices (dotted line textfigure *B*) might just as well have originated in Africa (see below), and be obliged to escape in Eastern direction.

Pygmies, Bushmen, Hottentots.

About an eventual relation of the meso-brachycephalic and the dolichocephalic Negroes I shall speak at the end of this paper. First I want to say a little more concerning two groups of the 77(78)—80(81) tribes, who deserve our special attention: the Pygmies and the Bushmen, starting with the indicial relations of the Pygmies (Table II, figs. 28a, 28b and textfigures *A* and *B*, p. 42).

In textfigure *A* I registered the male and female Efé Pygmies measured by JULIEN³⁾.

The continuous line of fig. 28a shows the cephalic indices of the male Basua and Bacwa Pygmies, measured by SEBESTA and LEBZELTER. The

¹⁾ Unfortunately the number of individual indices from Madagascar and the Comorro islands recorded in the literature is very small. The individual indices I could find, however, show 80—81 and 83 peaks. But on Madagascar also dolichocephalic groups occur.

²⁾ See "The degree of the changes in the cephalic index" etc. These Proc. Vol. 38, 1935, p. 989, and W. KLEIN. "The degree of the developmental change of the length-breadth index of the head in the Dutch Askenasim Jews." Ibidem Vol. 38, 1935, p. 1021.

³⁾ The dotted line in fig. *A* gives the indices of two Akka Pygmy skulls, recorded by FLOWER (J. Anthr. Inst. vol. 18, 1888, p. 73), three Central-African Pygmy skulls, described by POUTRIN (l'Anthropologie T. 21, 1910, p. 486), nine Egyptian Pygmy skulls (III^d dynasty), described by Miss H. D. SMITH (Biometrika, vol. 8, 1912, p. 262), and one Pygmy (Efé) skull in the possession of Dr. JULIEN. I have not been able to find the indices of the three Pygmy skulls photographed by VON LUSCHAN (Ztschr. f. Ethn. Bnd 46, 1914, p. 153).

interrupted line shows the indices of the other male Pygmies, recorded by these authors. Textfigure *B* gives the female indices of both of LEBZELTER's groups. In figure 28*b* I registered the cephalic indices found by KUHN with male Pygmies living on the left bank of the river Sanga, between the Gaboon and Ubangi districts, north of the lower part of the river Congo. The indices of 5 of the six Ituri¹⁾ Pygmies, recorded by VON LUSCHAN, had the same range.

Evidently the great majority of the Pygmies recorded in textfigures *A* and *B* and figs. 28*a* and 28*b* are meso- and subbrachycephalic. The outstanding character of either the 77 (textfig. *B* and continuous curve fig. 28*a*) or 80 index (dotted line, fig. 28*a*), or both together (textfig. *A* and. fig. 28*b*), strongly suggests that the 77 and 80 are associated, i.e. genetically related index peaks with this people, just as the 73 and 75 peaks are associated peaks of the first discussed groups.

JULIEN's and KUHN's Pygmy indices show a striking parallelism with those of the taller M'Baka and Banda (fig. 27) and with those of the Tounia Negroes (fig. 29) measured by POUTRIN. The same associated peaks occur with DELHAISE's (dotted line fig. 27) and with TORDAY's Congolese and also with BERKE's Cameroon Bantu (fig. 30). Since the Pygmies measured by KUHN were living on the left bank of the river Sanga while the Tounia live near the river Chari (south of Lake Tchad) and the M'Baka and Banda in the Ubangi district, all these groups form part of the central north equatorial population.

The associated, i.e. genetically related index peaks of all these people — whether they are small or tall — are about the same, the 77 (78) and 80 (81) indices being by far the most outstanding with all of them, thus confirming SHRUBSALL's statement²⁾ that the Pygmies have skull proportions analogous to those of the taller tribes in their vicinity. Whatever differences in stature there are between the taller and smaller Negroes of this region, their indicial relations are very much the same³⁾.

This may be brought forth as an argument in favour of the opinion of those (e.g. POUTRIN) who do not consider the African Pygmy as a race of its own.

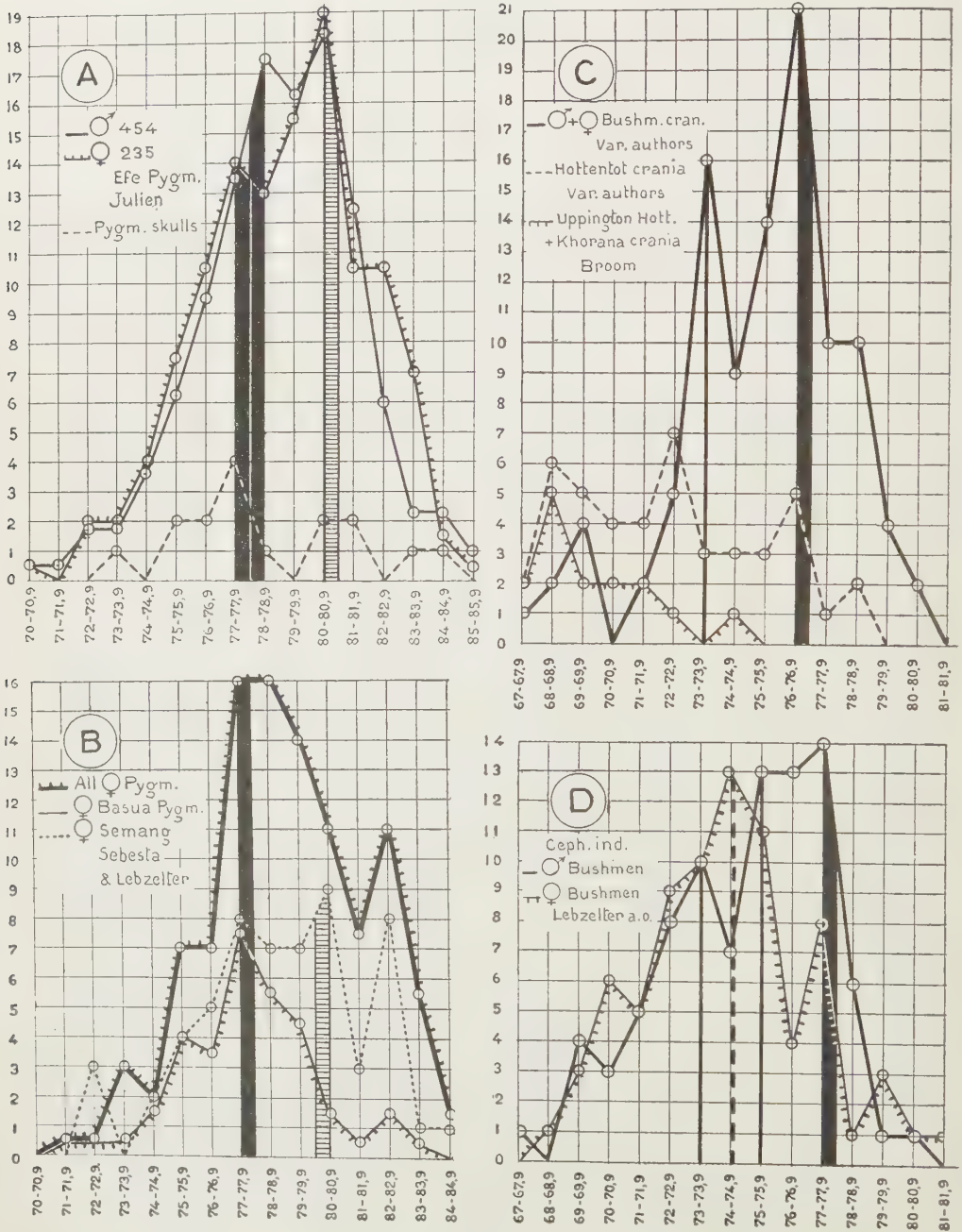
Here again the question arises if the African Pygmies have Asiatic relationship. The Veddahs of Ceylon are dolichocephalic. The Aetas (as the Andamanese) are mainly brachycephalic, but the dwarfish ulotrichous Negroid Semang and some related groups of Malacca, measured by SEBESTA and LEBZELTER show exactly the same index peaks. Textfig. *B*. shows the outstanding 77 and 80 peaks in the females, as well as the

¹⁾ These Ituri Pygmies lived near the Eastern Lake district. One of VON LUSCHAN's six Pygmies had an index of 92.

²⁾ Made in connection with his discussion of the Bushmen. *Annals of the S. African Museum* V. 1906—09.

³⁾ Similarly the index curve of the dolichocephalic kymotrichous Veddahs of Ceylon runs parallel to that of several tall dolichocephalic kymotrichous groups of British India. And the dwarfish ulotrichous Tapiro and Timorini of New Guinea (BIJLMER) have the same index peaks as some taller tribes of Dutch New Guinea.

occurrence of an additional 82 peak in the female Pygmies and female Semang. Since also the other somatic features correspond, the identity of these groups is not doubtful¹⁾.



¹⁾ The curve of 22 ♂ Tapiro Pygmies of New Guinea (WOLLASTON) shows peaks at 78 and 80 (and an additional one at 84). Also the combination of 73 and 75 peaks with a 77 (8) one (as with Bushmen) is frequent with the Melanesians, where the 78 peak again is often associated with an 80(1) one.

As the equatorial dwarfs are considered to be related to the nowadays more southern Bushmen, who formerly also inhabited equatorial regions, it is interesting to note that the cephalic curve of the male Bushmen (textfig. *D* p. 42) also has a 77 peak, so characteristic of SEBESTA's and LEBZELTER's male Basua and Bacwa and of their female Pygmies, but present also in all the other Pygmy curves.

Besides among the Bushmen as well as among the male Pygmies these are very few distinct brachycephalics. The conspicuous 80 elevation, also in JULIEN's and KUHN's material, even fails in the cephalic curve of the Bushmen, as it does in the curve of the male Basua and Bacua Pygmies. The Bushmen and Pygmy curves overlap only by their common 77 peak, probably the oldest of the 77—80(81) peaks. —

The pronounced cranial 73 peak of the Bushmen ¹⁾ (textfigure *C*), corresponding with the high 75 elevation in their male cephalic curve (*D*) — which curve in addition has a 73 peak — fails with the Pygmies as it does with the Asiatic Semang (dotted line textfigure *B*). These 73—75 peaks as well as the 74 cephalic Bushwomen peak (corresponding with the male 73 peak) betray a Capsian influence, which influence may have occurred in very ancient (Capsian) times, the relationship between Bushmen art and Capsian-Aurignacian culture being well known. The 73—75 admixture might, however, also be of more recent date, since some Hamitic peoples — quite numerous on the south east coast — live fairly near the ancient home of the Bushmen. I shall return to this alternative later on. First a few words concerning the Hottentots.

Since the Hottentots are usually considered to be closely related to the Bushmen, some words about their indices are not superfluous. The cephalic indices of SCHULTZE's male Hottentots with their outstanding 72 peak (fig. 12) are very different from those of the male Bushmen (textfigure *D*). Similarly the dotted curve in textfigure *C* shows that the Hottentots are on the whole more dolichocephalic. Their highest peak comes near the probably oldest (Capsian) 73 Bushmen skull peak ²⁾.

The majority of the Hottentot skulls registered in the dotted curve of textfigure *C* are far more dolichocephalic than the Bushmen skulls, especially BROOM's Uppington Hottentot and Khorana skulls, registered separately in the combed curve of textfigure *C*. BROOM emphasizes the Australoid features of his Khorana, as DRENNAN did for the prehistoric Cape Flat skull. Yet ancient dolichocephalic skulls are also found in the Lake district (LEAKEY). Even the recent Teita skulls from Kenya, recorded by Miss KITSON (Table III, fig. 3) are extremely dolichocephalic, ranging in the same category as the cephalic indices of SCHULTZE's Hottentots and of the present people of the Tanganyika region (fig. 12).

¹⁾ The additional 73 and prevailing 76 peak also occur in SHRUBSALL's Bushman skull series (J. Anthr. Inst. Vol. 28, p. 102).

²⁾ Fourteen doubtless pure Bushman skull indices, kindly sent to me by Dr. L. WELLS of Witwatersrand University, Johannesburg, show a 73 peak only.

The curves added to this paper entirely agree with Miss KITSON's statement about the close relationship of the Hottentots with the Tanganyika and Kenya tribes, for which also linguistic arguments may be advanced (see W. SCHMIDT, *Sprachenfamilien und Sprachenkreise der Erde*, p. 84). I am also inclined to believe that the lower indices of my Bushman curves represent their oldest type and that the 76 cranial (77 cephalic) constituent may be either an (Strandlooper or Pygmy) admixture, or a later development (see p. 46).

Kabyles and Guanches.

Although the *Kabyles* (*Berbers*) and *Guanches* do not belong to the Africans proper ¹⁾, their indicial relations should not be omitted here. While the cephalic index curve (fig. 35), made after PREENGRÜBER's data of male Kabyles (together with some "Berbères-Kabyles" of GILLEBERT D'HERCOURT) shows a good many 73 and 75 indices, so typical of the Caspian N. W. Africans, and even a small, but well pronounced 71 peak, occurring also with the Tunisians, the majority of the Algerian Kabyles differ from the Hamites in many ways, also by having a large — even prevailing amount of 77 indices. This also explains that the curve (not added to fig. 35) of BERTHOLON and CHANTRE's mixed Algerians and Tunisians, among whom a good many Kabyle indices, differs from BERTHOLON's purely Tunisian curve (fig. 5) by an outstanding 77 peak. DUHOUSSET's Djurjura Kabyles (fig. 36) show a distinct 78 peak and in addition have a 83 peak, slightly indicated with PREENGRÜBER's Kabyles.

A relationship of the white skinned kymotrichous and not rarely fair-haired and blue-eyed (though mostly dark-haired and hazle-eyed) Kabyles with the ulotrichous mesocephalic dark-skinned Central-African tribes mentioned above being excluded, this clearly shows that the mesocephalic peaks in both cases have arisen independently, the Kabyles probably being of Eurasian origin, similarly as the people of Gerba (38).

HADDON thinks it possible that they are remnants of the fair-haired Lybians of Egyptian monuments who may be derived from proto-Nordic groups who raided Egypt 1300 B.C. (relatives of the Philistines). So much is sure that they do not belong to an originally African stock.

The opinion of those who consider the Kabyles as related to the population of the Canary Islands is supported by the curve of nearly a thousand Canarians, measured by E. FISCHER, registered in fig. 37.

The parallelism of this curve with its outstanding 78(9) and 83 peaks with that of the Djurjura Kabyles (fig. 36) especially is very striking. That

¹⁾ MORANT (*Preliminary Classification of European Races Biometrika*, vol. 20b, 1928, p. 332) classifies them (just as MÜNTER's Copts) with the Basques, Etruscans and Pompejans.

both the Kabyles and modern Canarians may be akin to the Guanches (FISCHER), who inhabited the Canarian islands before the 16th century, is confirmed by a comparison of the cephalic male Kabyle index curve (fig. 35) with the cranial index curves of the male Guanche skulls made after VON BEHR's and HOOTON's data (dotted and combed lines in fig. 35). The 76 peak of the male Guanche skulls may correspond with the 77 cephalic peak of PREENGRÜBER's Kabyles (continuous line fig. 35). The main difference between the Guanche skull curves and the Kabyle cephalic curves of fig. 35 and 36 is the greater admixture of Hamitic indices, as may be expected, with the latter.

Résumé.

Leaving aside the last-named peoples and reviewing our curves of the Africans proper, we may say that two types of cephalic index curves, the 72(73)—75(76) and 77(78)—80(81) are the most typical ones.

The outstanding 73—75 peaks in North and East Africa and in the West Sudan plead in favour of a common, probably Capsian origin of the peoples living here. Analogous peaks with Proto-Aryans may indicate their common ancestry with the Hamites.

Contrary to these regions, Central and West-Central Africa (the Congo and Cameroon districts) is inhabited by a prevailing 77—80(81) index ulotrichian people of tall or Pygmy stature. The 77 peak also occurs with the Bushmen, with whom, however, lower indices are also numerous.

The closest Asiatic relatives of the African Pygmies are the Semang of Malacca.

From the meso-subbrachycephalic ulotrichan 77(78)—80(81) people (of which the mesocephalics may be the more ancient index type) some more brachycephalic Negro groups arose, living nowadays in the upper Congo district chiefly (fig. 34).

The name Semi-Hamites should be preferably applied to those groups — numerous especially in the Central and East Sudan but also occurring in the Lake district — which, together with Hamitic index peaks, show Central-African (Congolese) index peaks. The frequent 77(78) admixture in the regions bordering on the Congo and its rare occurrence in the utmost West Sudan, further away from the Congo, pleads for the central origin of this addition. The dolichocephalic ulotrichans of the Lake district deserve special attention since also the Hottentots belong to them. The relationship, if present, of these dolichocephalic with the meso-brachycephalic ulotrichans will be discussed below (see p. 46).

Index mutations in Africa?

In my paper on the stability and variability of index peaks with Asiatic peoples I referred to the possibility that the two main index groups of Eurasia north of the 40th parallel may be genetically related, and that

the Asiatic 83—86 index peak peoples might have arisen from an older paleo-Asiatic (78)79—(80)81 index stock. For this supposition I found support in BOAS', GUTHE's and HIRSCH's papers and in my own and KLEIN's researches on the developmental changes of the index from child to adult, that show that an 83—86 index type in adults may be due to an arrest of skull development caused by environmental conditions.

Besides, BOAS' data concerning his Sicilians — if arranged in curves — show the possibility of a 78—80 index peak curve arising in a Mediterranean 73—76 index peak people.

Naturally the question arises if index mutations may be assumed also in Africa.

In the North and East of this continent the outstanding cephalic peaks are the frequently associated 73—75 cephalic peaks, corresponding with the 71—73 cranial peaks (cf. Table III). While either of these Hamitic peaks may be prevailing in addition to them a cephalic 71 peak may arise, which — probably due to unfavourable environmental circumstances — may even become the most outstanding one (Tuaregs). An analogous lowering of the index is observed with the leptosome Denka (fig. 12a), compared to the related Kenya and Uganda tribes.

Is there any evidence that, apart from this lowering of the index, also an increase of the index occurs under special conditions?

While the curves added to this paper clearly show the contrast between the (72)73—75(76) Capsian and the 77(78)—80(81) central equatorial races and also reveal their mixtures, the indicial relations of the equatorial population are not exhausted with the 77(78)—80(81) groups. Figs. 29—31 show the occurrence of otherwise entirely homologous equatorial groups with an additional 83 peak and in fig. 33 an 85 elevation occurs, which in fig. 34 is even very outstanding.

However, not all the so-called real Negroes have prevailing 77(78)—80(81) and higher peaks. It is even frequently stated that the "true" Negro is dolichocephalic, a statement based on the Sudanese Negroes of the west coast chiefly.

Besides, the curves added to this paper confirm the statement that there are many groups, especially among the Nilotics, Baganda, Kenyas and Southern Bantu, whose features are prevailing Negroid, with whom a still higher degree of dolichocephaly prevails. While in several of these groups Hamitic influences are shown to occur, ethnologically as well as anthropologically, it would be wrong to explain Negroid dolichocephaly always by a *secondary* Hamitic admixture, in more or less historical times, also since the Hottentots — usually considered as a very ancient stock — are prevailingly dolichocephalic (see Table I fig. 12) and may be closely related to analogous groups of the Lake territory.

We cannot avoid asking if the meso-brachycephalic and the dolichocephalic Negroes may have a precapsian origin in common with the Hamitic races.

That anthropological features, and also the index peak, however valuable as a racial character, may change in the course of time under special conditions is sufficiently proved (BOAS c.s.). That such changes do not occur haphazard but represent special developmental stages of a group is rendered probable by my own papers and by KLEIN's for the Eurasian 79—81 and 83—86 groups. That even an evolution of a prevailing 78—80 index group in a Capsian-Hamitic 73—76 cephalic index people is not to be a priori excluded clearly appears from BOAS' data concerning his Sicilians, reexamined by myself (see figs. 14—17 of Table II in my preceding paper in these Proceedings).

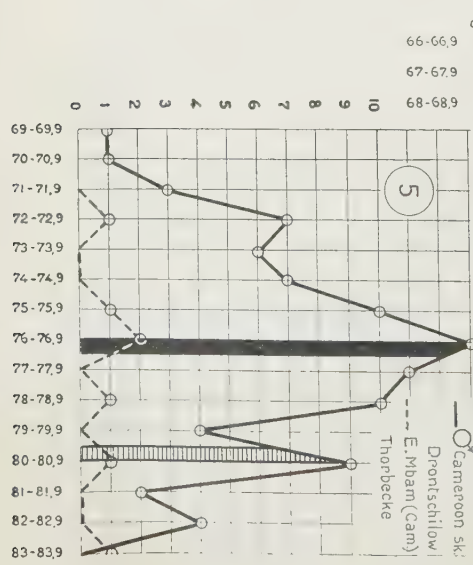
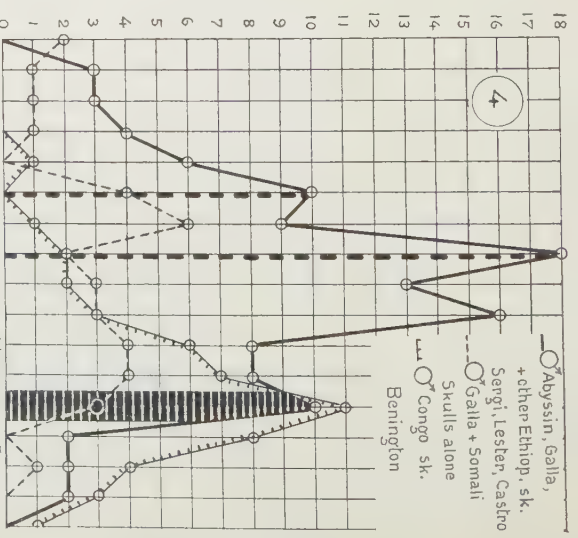
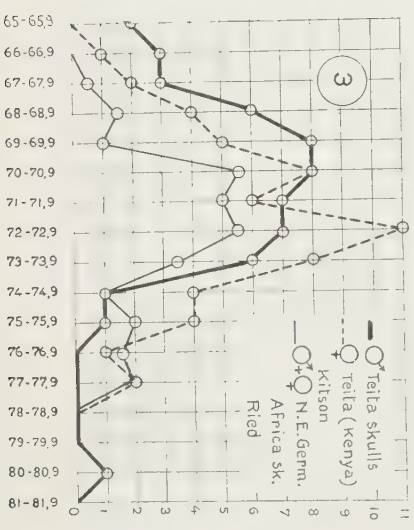
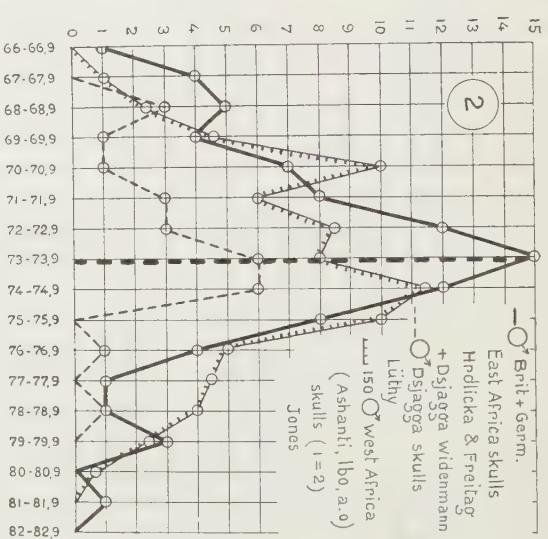
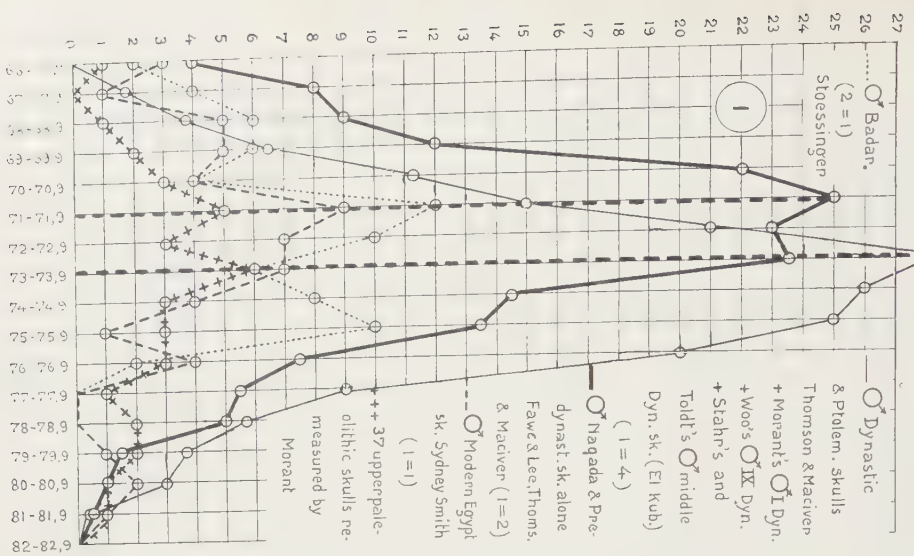
Besides, if DRENNAN's Plettenberg skull index (73.1) might be characteristic of a group of Prebushmen, and if the on the whole more dolichocephalic Hottentots are related to them, or at least originate from a common stock, as usually assumed, we might consider the cranial difference¹⁾, especially the frequent 76 cranial (77 cephalic) index type of Bushmen (and Central African tribes) as arisen from a lower index type as generally prevailed in Capsian times.

In connection with the question of a genetic relationship between the equatorial African 77(78)—80(81) tribes and the prevailingly dolichocephalic groups it is striking that also many other groups of the 77 (78)—80(81) tribes have a dwarfish stature. This may raise the question if the 77(78)—80(81) index type may be explained by arrested development, although these index peaks also occur with taller Congolese. These points should be considered — at least by those who are not convinced of a separate origin of the 77(—80) index Negroes. As stated above (footnote p. 42) my Melanesian curves have the same 73—75 and 77(78)—80 peaks. Although this pleads for a common (Asiatic) origin of the Western and Eastern Melanoderms, it also pleads for a genetic relationship of the dolicho- and mesocephalic Melanoderms amongst each other. The difference between the Hamites and dolichocephalic Negroes may be a greater one. Yet the relationship established by Miss KITSON²⁾ (l.c.) between the physically prevailingly Hamitic Galla and Somali on the one hand and the

¹⁾ For an exact comparison of Bushman and Hottentot skulls, see Miss KITSON (l.c.s.).

²⁾ The relationship established by Miss KITSON between the Galla and Somali on the one hand (via a group of Egyptian Negroes, whose individual indices were not at my disposal) and the Gaboon, Congo and Cameroon skulls might be caused rather by common admixtures. The authoress herself speaks with great reserve about this matter, especially about her small amount of Galla and Somali skulls. In the dotted curve in Table III fig. 4 I put the indices of the skulls of this combined group used for her comparison, leaving out three Somali skulls recorded by PAULITSCHKE, whose article was not at my disposal. On the other hand I inserted all the five male Somali skulls, recorded by SERGI (Miss KITSON uses three of them only). The curve resulting is too small to give a conclusion with my method but I get the impression that we have a rather mixed group here. The Congo and Cameroon skulls she used were far more numerous. They are the same as inserted in the combed curve of Table III fig. 4 and the curve of fig. 5. MOLLISON's Cameroon skulls are registered separately in figure 5.

Table III Cran. ind.



essentially equatorial Gaboons, Congolese and Cameroons also involves the question as to a genetic relation of the dolichocephalic and the meso-brachycephalic groups. Though further researches are necessary to decide if an originally prevailing dolichocephalic group may give rise to a prevailing meso-subbrachycephalic one. MORANT in his paper on Badari skulls (1935) also points to a gradual decrease of prognathism and an increase of the index in related (Egyptian) groups.

LITERATURE.

The papers used for making my curves and those consulted for other reasons are far too numerous to be added here. A very extensive list of literature up to 1922 is found in STRUCK's excellent paper in the *Zeitschr. f. Ethnographie* Vol. 54, 1922, p. 51, in R. B. DIXON's book *The racial history of man*, 1923, in MONTANDON's *Ologenèse humaine*, 1928 and VON EICKSTEDT's *Rassenkunde und Rassengeschichte der Menschheit*, 1934. For the study of Egyptian craniology from Prehistoric to Roman times I refer to MORANT's paper in *Biometrika* Vol. 17 1925 and to the papers of his collaborators Miss STOESSINGER (*Biom.* Vol. 19, 1927), Dr. WOO (*Biom.* Vol. 22, 1930) and Miss COLLETT (*Biom.* Vol. 25, 1933), where all the older literature on this subject is found. For the question of Asiatic (Dravidian) relationship I especially refer to MORANT's recent paper in *Biometrika* Vol. 37, 1935, p. 293.

For African bloodgroups see P. F. J. A. JULIEN: *Bloedonderzoek der Efé-Pygmeeën en der omwonende Negerstammen*. Verhand. v. h. Kon. Belgisch Koloniaal Instituut, Deel IV, 1935, afd. Natuur- en Geneesk. Wetenschappen.

TABLES.

Table I and II (except fig. 35) only give cephalic index curves. The curves are arranged according to their similarity, which does not always imply that the groups of whom they are made are specially related. The curves in figs. 35—38 show indices of Kabyles, Canarians, Guanches and Gerba-islanders, usually considered as not originally African.

Physics. — *Determination of the temperature in the column of a discharge from the intensity-measurement of rotational band spectra.* By T. HAMADA. (Communication from the Physical Institute of the University of Utrecht.) (Communicated by Prof. L. S. ORNSTEIN).

(Communicated at the meeting of December 21, 1935).

Although the temperature measurement by rotational band spectra assumes BOLTZMANN's distribution for the concentration of molecules in the initial levels and seems by nature to be applicable only to thermally excited gas, W. R. VAN WIJK, following the idea of L. S. ORNSTEIN¹⁾, has succeeded in proving experimentally, with nitrogen gas, that this method gives the real temperature of the gas even for a non-thermal excitation such as occurs in a discharge tube. P. J. HARINGHUIZEN²⁾ already utilized it in his optical investigation of gas discharges in capillary tubes to determine temperatures for some cases.

In our experiments the same principle was applied, in order to measure the temperatures of the gas in a capillary discharge-tube filled with nitrogen, especially in their variations with the discharge-currents and gas-pressures, and also to get acquainted with the distribution of the temperature along the diameter of the tube.

The dischargetube designed for this measurement is shown in fig. 1.

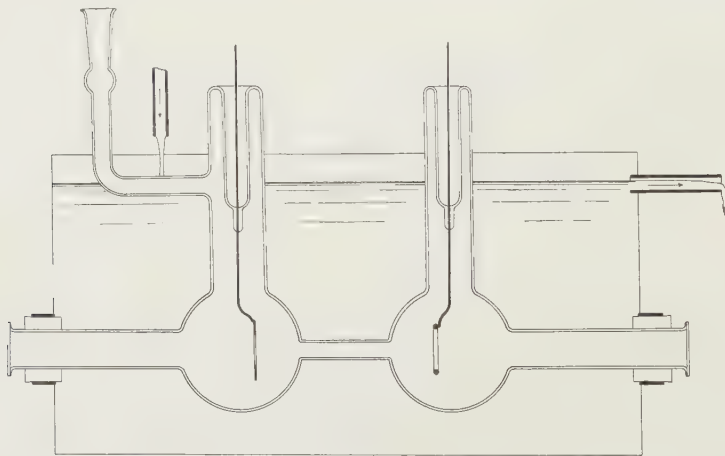


Fig. 1.

A narrow tube of 9,7 mm inside-diameter and 6 cm length connects two

- ¹⁾ L. S. ORNSTEIN and W. R. VAN WIJK, *Zs. f. Phys.* **49**, p. 315, 1928.
W. R. VAN WIJK, *Zs. f. Phys.* **59**, p. 313, 1930; **75**, p. 584, 1932.
W. R. VAN WIJK, *Diss. Utrecht* 1930.
- ²⁾ P. J. HARINGHUIZEN, *Zs. f. Phys.* **77**, p. 788, 1932.
P. J. HARINGHUIZEN, *Diss. Utrecht* 1935.

spherical bulbs of 8 cm diameter, which contain anode and cathode respectively and are provided with long cylindrical extensions. Both electrodes are made in ring form, in order to observe the narrow tube in the axial direction through the electrodes. The whole tube is immersed in a cooling tank filled with running water. A large glass window, on one side of the tank, enables us to watch the conditions of the discharge during the experiments. The pressure in the tube can be regulated to any desired value by means of a pump and a nitrogen reservoir connected to it.

A constant direct voltage (2000—3500 V) is supplied to the electrodes through series resistance, by which the discharge current can be regulated. When the tube is running, strong light is only present in the narrow part of the tube. The volt-amp. characteristics of the tube were measured for different pressures and are shown in fig. 2. For higher pressure they have the usual form of falling characteristics; however, for lower pressure

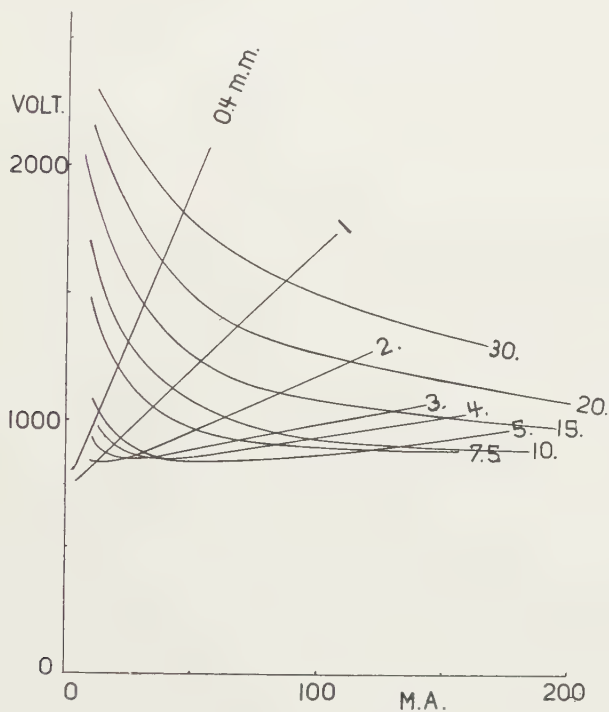


Fig. 2.

voltage has a minimum at a certain current. Comparing the characteristics with those of another tube, built in the same dimensions except for the narrow part whose length amounts to 20 cm instead of 6 cm, we determined the field intensities and electric energy spent in the positive column for different conditions. Fig. 3 shows the field intensities thus obtained.

The colour of the discharge in the column is a bright pink at high pressure and strong current, i.e. at high temperature, as will be shown afterwards in our experimental results, but as the temperature is lowered,

it becomes more yellowish and, at last, at about 2 mm pressure, the glow begins to be striated. At quite low pressure of some hundredths of mm,

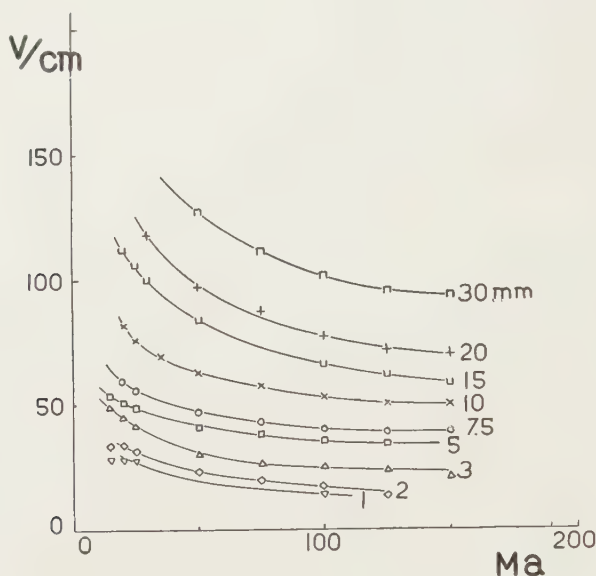


Fig. 3.

however, it turns uniform again with a deep pink colour, showing rather intense positive band spectra and, at the same time, the tube manifests such a strong self-cleaning action, that it is impossible to keep the discharge going without constantly supplying gas from the reservoir.

For our spectroscopical work we used the medium size grating set of the Institute, which is specially arranged to give a perfect stigmatic image.¹⁾ The narrow part of the discharge tube, filled with nitrogen, is aligned exactly to the optical axis of the apparatus and its image is focussed on the slit of the grating. This concave grating, having 568 lines per mm, gives a dispersion of 2.6 \AA per mm on the photographic plate in the spectrum of second order, which is sufficient to separate the triplets of the R -lines in the second positive band 3998 \AA of nitrogen. The position of the camera is chosen so as to get this 3998 \AA band together with a negative band at 3914 \AA on the same plate, the temperature being calculated from both bands and compared to check the results for several cases.

In order to determine the temperature as a function of radius, the latter band is preferable, because, thanks to the simplicity of its structure, we can take the components of the lower numbers ($J=7\sim 21$), which have sufficient intensities even for a low temperature; on the other hand, the R_3 components of the 3998 \AA band offer the advantage of being free from disturbances within a range of $J=15\sim 29$ in our arrangement.

The length of the spectral lines on the plate, corresponding to the

¹⁾ P. H. VAN CITTERT, *Zs. f. Inst.* **41**, p. 116, 1921.

diameter of the narrow part of the tube, is 12,0 mm, while the length of the spot of light with which the lines are photometered amounts to 0,5 mm. Owing to the high resolving power of the grating, we could determine the intensities of the lines by simply measuring their height on the microphotogram. The correctness of this method has been checked by calculations from the area of the lines on the intensity diagram.

The exposures were made for seven different currents with 10 mm pressure, and for three different currents each with pressures of 3, 5, 15, 20, 30 mm. For each case we microphotometered the plates and determined the temperature at several points along the diameter. Fig. 4, as an example, shows a diagram from which the temperature has been determined. (I =intensity; J =rotational quantum number; R =radius).

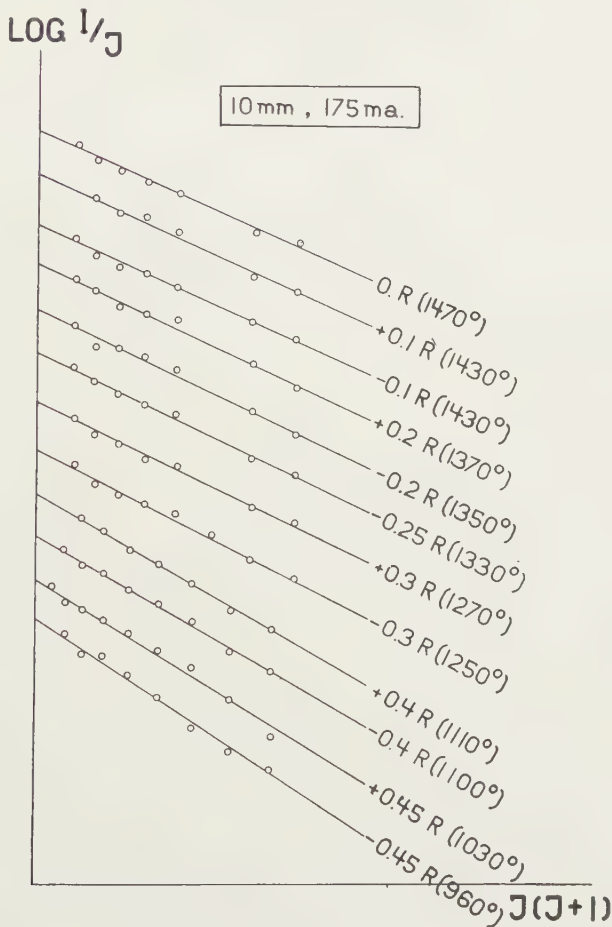


Fig. 4.

The temperature, for given conditions, is always highest on the axis of the tube, i.e. at the centre of the diameter and we can take this temperature as a measure for the comparison of the discharge under different conditions. The values of the axial temperature, as shown in the following table,

increase for higher current and higher pressure, ranging from 380° K at low pressure up to 2000° K at 30 mm pressure.

$\begin{array}{c} i \text{ ma} \\ p \text{ mm} \end{array}$	25	50	75	100	125	150	175
10^{-2} ¹⁾	380						
3	810	900	1030				
5	880	970	1090				
10	900	1070	1150	1250	1320	1390	1470
15		1140	1290	1425			
20		1310	1475	1640			
30		1420	1770	2000			

Examining these results, we arrived at the conclusion that the temperature on the axis can be expressed as a linear function of the product of pressure and current, as long as we are concerned with the discharges that have the falling characteristics. The empirical equation for our tube is:

$$T = 0,385 (p \times i) + 850,$$

where p is pressure in mm and i is current in mA. In fig. 5 is shown the

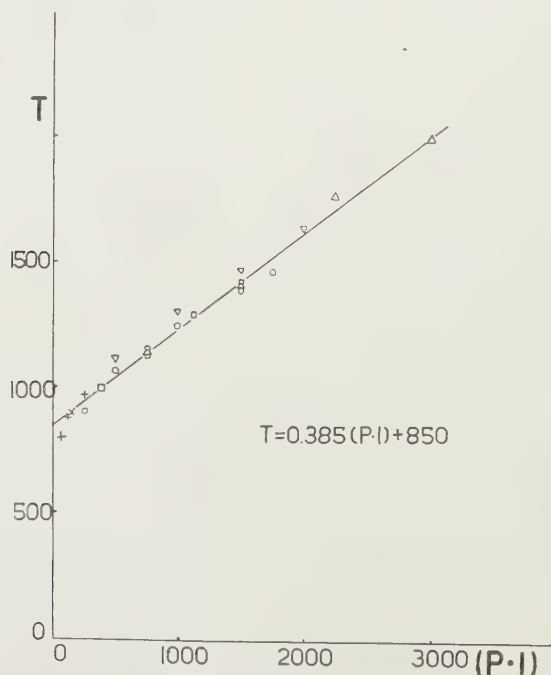


Fig. 5.

¹⁾ In this case, though the strong self-cleaning action of the tube prevented us to measure the pressure exactly, we can estimate it to be some hundredths of mm.

straight line representing the above equation together with measured points.

In this connection we must here refer to the electrical energy spent in the column, whose values, calculated from the field-intensity and the current, are shown in the following table and are found also to be a function of the product ($p.i$).

Electrical energy spent in the column (watts/cm.)						
$\begin{array}{c} i \\ p \end{array}$	25	50	75	100	125	150
3	1.04	1.50	1.98	2.57	2.94	3.1
5	1.22	2.04	2.87	3.58	4.29	—
10	1.90	3.15	4.30	5.28	6.25	7.40
15	2.65	4.20	5.55	6.61	7.70	8.73
20	2.98	4.85	6.52	7.65	8.92	10.5
30	—	6.35	8.32	10.10	11.88	13.92

Next we must consider the way in which the temperature varies for different points on the diameter. Figs. 6 to 12 show the measured temperatures as a function of radius for different cases. As we can easily understand, the temperature falls down from the maximum at the centre

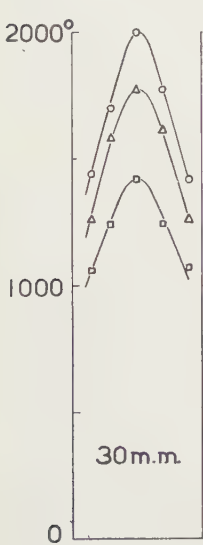


Fig. 6.

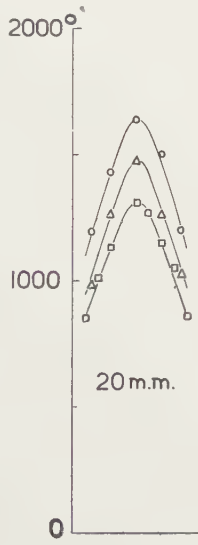


Fig. 7.

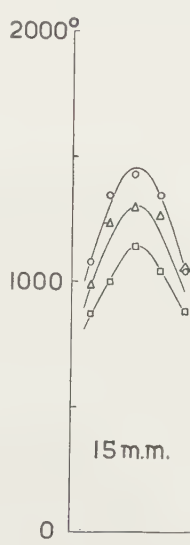


Fig. 8.

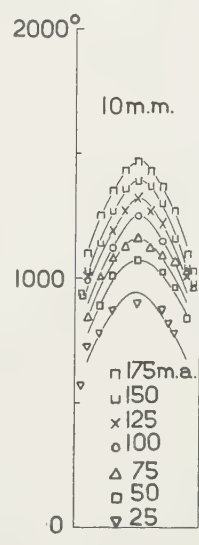


Fig. 9.

towards the wall, first slowly and then quickly. The forms of the curves are almost symmetrical in regard to the axis, though the right sides in the figures, corresponding to the upper half of the vertical diameter, always show slightly higher temperatures than the other sides. These curves become steeper for higher temperature at the centre, but they are of quite similar type and can be regarded as parabolae except for the

parts near the wall of the tube. It is not easy to obtain reliable values for the temperature at the wall, because, though we measured up to points

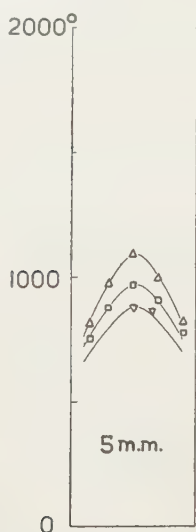


Fig. 10.

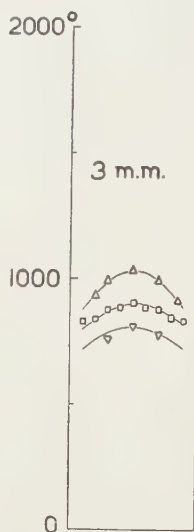


Fig. 11.

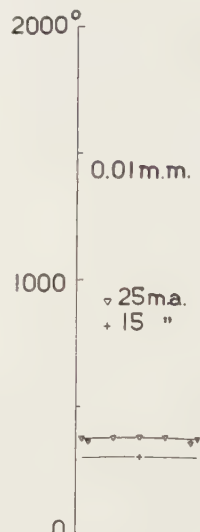


Fig. 12.

at 3,5 ~ 4,5 tenths of the diameter from the centre, extrapolation of the curves to the wall is likely to give too high values. On the contrary, from a calculation of the difference of temperature which should exist between

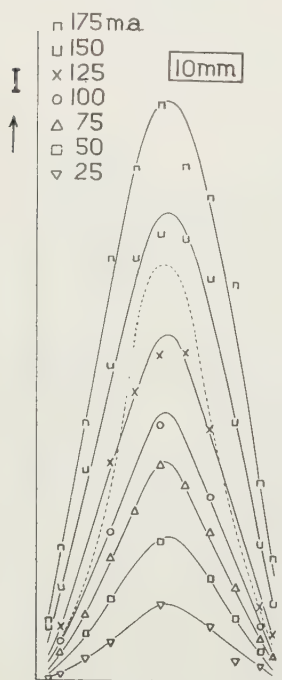


Fig. 13.

the inner and outer sides of the glass wall, in order to conduct the heat produced in the gas through the wall, we get far lower values for the temperature on the inner side. This estimation, however, may be too low, if we take into account the heat generations, either on the wall due to the recombination or in the wall due to the absorption of the ultra-violet radiation.

From those diagrams, used for determination of the temperatures, such as shown in fig. 4, we can calculate the total intensity of the band. For the negative band at 3914 Å the intensity at the axis of the tubes is nearly proportional to the current, but almost independent of the pressure. Fig. 13 shows the distribution along the diameter for different currents. It can be seen that these distribution curves have not the same shape, but are steeper for low currents. For the second positive band at 3998 Å the distribution of the intensity has a form different from that for the negative band and an example is shown in fig. 13 with a broken line.

We hope to publish the theoretical interpretation of the experimental results given above in the next number of these Proceedings.

In conclusion I wish to express my thanks to Professor L. S. ORNSTEIN, under whose kind direction this experiment has been done. I am also indebted to Mr. H. BRINKMAN for his valuable advice and to Mr. E. KATZ and Mr. J. G. HAGEDOORN for their earnest help.

Mathematics. — *Ueber Pseudobewertungen Ia. (Zerlegungssätze).* Von KURT MAHLER. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT).

(Communicated at the meeting of November 30, 1935).

Die Untersuchungen des ersten Teils der vorliegenden Arbeit (Acta Mathematica. Bd. 66, S. 79—119) werden fortgesetzt, die Eigenschaften direkter Summendarstellungen näher betrachtet, und es wird u. a. der folgende Satz bewiesen: „Lässt sich eine Pseudobewertung $W(a)$ auf zwei verschiedene Arten

$$W(a) \sim \sum_{k=1}^n W_k(a) \quad \text{und} \quad W(a) \sim \sum_{K=1}^N W^{(K)}(a)$$

als direkte Summe je endlich vieler irreduzibler, nicht identisch verschwindender Pseudobewertungen darstellen, so sind die Summanden dieser beiden Zerlegungen bis auf die Reihenfolge einander Glied für Glied äquivalent.“ Eine solche Zerlegung ist also bis auf Äquivalenz eindeutig.

1. Im folgenden legen wir dieselben Bezeichnungen zugrunde wie in der Arbeit „Ueber Pseudobewertungen I“, auf die wegen der benutzten Definitionen und Sätze verwiesen sei.

R bedeutet stets einen festen kommutativen Ring mit Eins-Element 1, $W(a)$ eine feste Pseudobewertung desselben und

$$W(a) \sim W_1(a) + W_2(a) + \dots + W_n(a)$$

eine gleichfalls feste Darstellung von $W(a)$ als direkte Summe der endlich vielen unabhängigen Pseudobewertungen

$$W_1(a), W_2(a), \dots, W_n(a)$$

von R . Auch alle sonstigen Pseudobewertungen, die im Text vorkommen, z.B. $W^*(a)$, $W^{**}(a)$, $W_k^{*(K)}(a)$, usw., gehören zum Ring R und werden überdies in $W(a)$ enthalten sein. Wir werden fortwährend davon Gebrauch machen, dass aus einer Relation

$$W'(a) \subset W''(a)$$

zwischen zwei Pseudobewertungen folgt, dass jede Fundamentalfolge bzw. Nullfolge in bezug auf $W''(a)$ auch eine solche in bezug auf $W'(a)$ darstellt.

2. Wegen der Unabhängigkeit von $W_1(a), W_2(a), \dots, W_n(a)$ gibt es n unendliche Folgen

$$d_1^{(k)}, d_2^{(k)}, d_3^{(k)}, \dots \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

die in bezug auf diese Pseudobewertungen den n^2 Limesgleichungen

$$\lim_{m \rightarrow \infty} W_h(d_m^{(k)} - \delta_{hk}) = 0 \quad (h, k = 1, 2, \dots, n)$$

genügen; dabei ist wie üblich

$$\delta_{hk} = \begin{cases} 1 & \text{für } h = k, \\ 0 & \text{für } h \neq k. \end{cases}$$

Diese Folgen sind daher insbesondere in bezug auf $W_1(a), W_2(a), \dots, W_n(a)$ und also auch in bezug auf deren Summe $W(a)$ Fundamentalfolgen.

Bedeutet $W^*(a)$ irgend eine in $W(a)$ enthaltene Pseudobewertung:

$$W^*(a) \subset W(a),$$

so stellen die vorigen Folgen erst recht in bezug auf $W^*(a)$ Fundamentalfolgen dar, und also existieren für jedes a aus R die Grenzwerte

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a d_m^{(k)}(W^*) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

und folglich auch die reellen Limites

$$W_k^*(a) = \lim_{m \rightarrow \infty} W^*(a d_m^{(k)}) \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Die durch sie definierten n Funktionen $W_k^*(a)$ der Zahlen a aus R nennen wir die Komponenten von $W^*(a)$ in bezug auf $W_1(a), W_2(a), \dots, W_n(a)$. Sie hängen nicht von der speziellen Wahl der n Folgen

$$d_1^{(k)}, d_2^{(k)}, d_3^{(k)}, \dots \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

ab. Denn sind

$$e_1^{(k)}, e_2^{(k)}, e_3^{(k)}, \dots \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

n andere Folgen mit

$$\lim_{m \rightarrow \infty} W_h(e_m^{(k)} - \delta_{hk}) = 0 \quad (h, k = 1, 2, \dots, n),$$

so ist offenbar für jedes a aus R

$$\lim_{m \rightarrow \infty} W_h(a(e_m^{(k)} - d_m^{(k)})) = 0 \quad (h, k = 1, 2, \dots, n),$$

also

$$\lim_{m \rightarrow \infty} W(a(e_m^{(k)} - d_m^{(k)})) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} W^*(a(e_m^{(k)} - d_m^{(k)})) = 0$$

und daher

$$\lim_{m \rightarrow \infty} W^*(a e_m^{(k)}) = \lim_{m \rightarrow \infty} W^*(a d_m^{(k)}) \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

3. Satz 1: Die n Komponenten $W_k^*(a)$ von $W^*(a)$ sind Pseudobewertungen.

Beweis: Es ist erstens trivialerweise

$$W_k^*(0) = 0, \quad W_k^*(a) \geq 0 \text{ für } a \text{ in } R.$$

Aus der Dreiecksungleichung für $W^*(a)$ folgt zweitens

$$\begin{aligned} W_k^*(a-b) &= \lim_{m \rightarrow \infty} W^*(a d_m^{(k)} - b d_m^{(k)}) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \{ W^*(a d_m^{(k)}) + W^*(b d_m^{(k)}) \} = \\ &= W_k^*(a) + W_k^*(b). \end{aligned}$$

Drittens ist endlich auch

$$W_k^*(ab) \leq W_k^*(a) W_k^*(b),$$

wie sich folgendermassen ergibt: Jede der n Folgen

$$d_1^{(k)2} - d_1^{(k)}, \quad d_2^{(k)2} - d_2^{(k)}, \quad d_3^{(k)2} - d_3^{(k)}, \dots \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

konvergiert offenbar in bezug auf $W_1(a)$, $W_2(a)$, \dots , $W_n(a)$, also auch in bezug auf $W(a)$ und folglich auch in bezug auf $W^*(a)$ gegen Null, so dass daher insbesondere für zwei beliebige Zahlen a und b aus R

$$\lim_{m \rightarrow \infty} W^*(ab(d_m^{(k)2} - d_m^{(k)})) = 0$$

und demnach

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} W^*(ab d_m^{(k)}) &= \lim_{m \rightarrow \infty} W^*(a d_m^{(k)} \cdot b d_m^{(k)} - ab(d_m^{(k)2} - d_m^{(k)})) = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} W^*(a d_m^{(k)} \cdot b d_m^{(k)}) \end{aligned}$$

ist; hieraus ergibt sich aber in der Tat

$$\begin{aligned} W_k^*(ab) &= \lim_{m \rightarrow \infty} W^*(ab d_m^{(k)}) = \lim_{m \rightarrow \infty} W^*(a d_m^{(k)} \cdot b d_m^{(k)}) \leq \\ &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \{ W^*(a d_m^{(k)}) W^*(b d_m^{(k)}) \} = W_k^*(a) W_k^*(b). \quad ^1) \end{aligned}$$

4. Satz 2: Es ist $W^*(a) \circ W_1^*(a) + W_2^*(a) + \dots + W_n^*(a)$.

Beweis: Wegen $W^*(a d_m^{(k)}) \leq W^*(a) W^*(d_m^{(k)})$ ist

$$W_k^*(a) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \{ W^*(a) W^*(d_m^{(k)}) \} = W^*(a) W_k^*(1)$$

und also

$$(a): \quad W_k^*(a) \subset W^*(a) \text{ für } k=1, 2, \dots, n, \quad \text{d. h.} \quad \sum_{k=1}^n W_k^*(a) \subset W^*(a).$$

¹⁾ Es ist natürlich möglich, dass eine oder mehrere der Komponenten $W_k^*(a)$ für alle a verschwindet, also gleich der uneigentlichen Pseudobewertung $U(a)$ ist.

Weiter ist für jedes a aus R

$$a - \sum_{k=1}^n a d_m^{(k)} \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

eine Nullfolge in bezug auf $W_1(a), W_2(a), \dots, W_n(a)$, also in bezug auf $W(a)$ und folglich auch in bezug auf $W^*(a)$:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} W^* \left(a - \sum_{k=1}^n a d_m^{(k)} \right) = 0.$$

Aus der Dreiecksungleichung ergibt sich daher

$$W^*(a) \leq \sum_{k=1}^n \lim_{m \rightarrow \infty} W^*(a d_m^{(k)}) = \sum_{k=1}^n W_k^*(a),$$

und somit gilt:

$$(b): \quad W^*(a) \subset \sum_{k=1}^n W_k^*(a).$$

Die Aussagen (a) und (b) enthalten zusammen die Behauptung.

5. Satz 3: Seien $W^*(a)$ und $W^{**}(a)$ zwei Pseudobewertungen von R mit $W^*(a) \subset W^{**}(a) \subset W(a)$, und seien ferner $W_1^*(a), W_2^*(a), \dots, W_n^*(a)$, bzw. $W_1^{**}(a), W_2^{**}(a), \dots, W_n^{**}(a)$ die Komponenten von $W^*(a)$, bzw. von $W^{**}(a)$. Dann ist $W_k^*(a) \subset W_k^{**}(a)$ für $k = 1, 2, \dots, n$.

Beweis: Wir müssen zeigen, dass für jede Folge

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

aus R mit

$$\lim_{m \rightarrow \infty} W_k^{**}(a_m) = 0, \text{ d. h. } \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{\mu \rightarrow \infty} W^{**}(a_m d_\mu^{(k)}) = 0$$

auch

$$\lim_{m \rightarrow \infty} W_k^*(a_m) = 0, \text{ d. h. } \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{\mu \rightarrow \infty} W^*(a_m d_\mu^{(k)}) = 0$$

ist. Dies folgt aber leicht aus der Voraussetzung $W^*(a) \subset W^{**}(a)$.

Satz 4: Ist $W^*(a) \subset W(a)$, $W^{**}(a) \subset W(a)$ und $W^*(a) \sim W^{**}(a)$, so gilt für die zu $W^*(a)$ und $W^{**}(a)$ gehörigen Komponenten: $W_k^*(a) \sim W_k^{**}(a)$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

Beweis: Klar nach Satz 3.

6. Satz 5: Die Komponenten $W_1'(a), W_2'(a), \dots, W_n'(a)$ von $W(a)$ in bezug auf $W_1(a), W_2(a), \dots, W_n(a)$ genügen den Äquivalenz-Beziehungen $W_k'(a) \sim W_k(a)$ für $k = 1, 2, \dots, n$.

Beweis: Ist erstens a_1, a_2, \dots eine unendliche Zahlfolge aus R mit

$$\lim_{m \rightarrow \infty} W_k(a_m) = 0,$$

so gelten offenbar auch die n Gleichungen

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{\mu \rightarrow \infty} W_h(a_m d_\mu^{(k)}) = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, n).$$

Aus diesen folgt die Beziehung

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{\mu \rightarrow \infty} W(a_m d_\mu^{(k)}) = 0,$$

und das ist nach Definition dasselbe wie

$$\lim_{m \rightarrow \infty} W'_k(a_m) = 0.$$

Ist zweitens

$$\lim_{m \rightarrow \infty} W'_k(a_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{\mu \rightarrow \infty} W(a_m d_\mu^{(k)}) = 0,$$

so gilt erst recht

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{\mu \rightarrow \infty} W_k(a_m d_\mu^{(k)}) = 0,$$

wegen

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} W_k(a_m d_\mu^{(k)}) = W_k(a_m)$$

also wirklich

$$\lim_{m \rightarrow \infty} W_k(a_m) = 0.$$

Satz 6: Ist $W^*(a) \subset W(a)$ und bedeuten $W_1^*(a), W_2^*(a), \dots, W_n^*(a)$ die Komponenten von $W^*(a)$ in bezug auf $W_1(a), W_2(a), \dots, W_n(a)$, so gelten die Beziehungen: $W_k^*(a) \subset W_k(a)$ für $k = 1, 2, \dots, n$. Ist sogar $W^*(a) \sim W(a)$, so hat man: $W_k^*(a) \sim W_k(a)$ für $k = 1, 2, \dots, n$.

Beweis: Klar nach den Sätzen 3, 4 und 5.

7. **Satz 7:** Seien $W^*(a), W^{*(1)}(a), W^{*(2)}(a), \dots, W^{*(N)}(a)$ beliebige $N+1$ in $W(a)$ enthaltene Pseudobewertungen mit

$$W^*(a) \sim W^{*(1)}(a) + W^{*(2)}(a) + \dots + W^{*(N)}(a),$$

und $W_k^*(a), W_k^{*(1)}(a), W_k^{*(2)}(a), \dots, W_k^{*(N)}(a)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) ihre Komponenten in bezug auf $W_1(a), W_2(a), \dots, W_n(a)$. Dann ist

$$W_k^*(a) \sim W_k^{*(1)}(a) + W_k^{*(2)}(a) + \dots + W_k^{*(N)}(a) \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Beweis: Aus der Voraussetzung folgt insbesondere

$$W^{*(K)}(a) \subset W^*(a) \quad (K = 1, 2, \dots, N).$$

Daher ist nach Satz 3

$$W_k^{*(K)}(a) \subset W_k^*(a) \quad \left(\begin{array}{l} k = 1, 2, \dots, n \\ K = 1, 2, \dots, N \end{array} \right)$$

und somit

$$(a): W_k^{*(1)}(a) + W_k^{*(2)}(a) + \dots + W_k^{*(N)}(a) \subset W_k^*(a) \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Weiter ist für jede unendliche Folge a_1, a_2, a_3, \dots aus R mit

$$\lim_{m \rightarrow \infty} W_k^{*(K)}(a_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{\mu \rightarrow \infty} W^{*(K)}(a_m d_{\mu}^{(k)}) = 0 \quad (K = 1, 2, \dots, N)$$

offenbar auch

$$\lim_{m \rightarrow \infty} W_k^*(a_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{\mu \rightarrow \infty} W^*(a_m d_{\mu}^{(k)}) = 0,$$

und also ergibt sich:

$$(b): W_k^*(a) \subset W_k^{*(1)}(a) + W_k^{*(2)}(a) + \dots + W_k^{*(N)}(a) \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Aus (a) und (b) zusammen folgt die Behauptung.

8. **Satz 8:** Bedeuten $W^{*(1)}(a), W^{*(2)}(a), \dots, W^{*(N)}(a)$ beliebige N von einander unabhängige, in $W(a)$ enthaltene Pseudobewertungen von R , so sind die nN zugehörigen Komponenten in bezug auf $W_1(a), W_2(a), \dots, W_n(a)$:

$$W_k^{*(K)}(a) \quad \left(\begin{array}{l} k = 1, 2, \dots, n \\ K = 1, 2, \dots, N \end{array} \right).$$

ebenfalls von einander unabhängig.

Beweis: Nach Voraussetzung gibt es N unendliche Zahlfolgen

$$D_1^{(K)}, D_2^{(K)}, D_3^{(K)}, \dots \quad (K = 1, 2, \dots, N)$$

aus R mit

$$\lim_{m \rightarrow \infty} W^{*(H)}(D_m^{(K)} - \delta_{HK}) = 0 \quad (H, K = 1, 2, \dots, N).$$

Wir werden die Behauptung offenbar bewiesen haben, wenn wir zeigen, dass

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} W_h^{*(H)}(d_m^{(k)} D_m^{(K)} - \delta_{hk} \delta_{HK}) = \\ = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{\mu \rightarrow \infty} W^{*(H)}(\{d_m^{(k)} D_m^{(K)} - \delta_{hk} \delta_{HK}\} d_\mu^{(h)}) = 0 \quad \begin{pmatrix} h, k = 1, 2, \dots, n \\ H, K = 1, 2, \dots, N \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ist. Wegen

$$(d_m^{(k)} D_m^{(K)} - \delta_{hk} \delta_{HK}) \delta_\mu^{(h)} = (D_m^{(K)} - \delta_{HK}) d_m^{(k)} d_\mu^{(h)} + \delta_{HK} (d_m^{(k)} - \delta_{hk}) d_\mu^{(h)}$$

genügt es statt dessen zu beweisen, dass

$$(a): \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{\mu \rightarrow \infty} W^{*(H)}(\{D_m^{(K)} - \delta_{HK}\} d_m^{(k)} d_\mu^{(h)}) = 0 \quad \begin{pmatrix} h, k = 1, 2, \dots, n \\ H, K = 1, 2, \dots, N \end{pmatrix}$$

und

$$(b): \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{\mu \rightarrow \infty} W^{*(H)}(\delta_{HK} \{d_m^{(k)} - \delta_{hk}\} d_\mu^{(h)}) = 0 \quad \begin{pmatrix} h, k = 1, 2, \dots, n \\ H, K = 1, 2, \dots, N \end{pmatrix}$$

ist. Hiervon ergibt sich (a) aus

$$\lim_{m \rightarrow \infty} W^{*(H)}(D_m^{(K)} - \delta_{HK}) = 0$$

und der Beschränktheit der Zahlen

$$W^{*(H)}(d_m^{(k)}), W^{*(H)}(d_\mu^{(h)})$$

für alle m und μ , da ja die $d_m^{(k)}$ und $d_\mu^{(h)}$ wegen $W^{*(H)}(a) \subset W(a)$ Fundamentalfolgen in bezug auf die Pseudobewertungen $W^{*(H)}(a)$ sind. Die Gleichung (b) dagegen folgt aus der Beschränktheit der Zahl $W^{*H}(\delta_{HK})$ und aus

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{\mu \rightarrow \infty} W^{*(H)}(\{d_m^{(k)} - \delta_{hk}\} d_\mu^{(h)}) = 0,$$

was sofort aus den Gleichungen

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{\mu \rightarrow \infty} W_l(\{d_m^{(k)} - \delta_{hk}\} d_\mu^{(h)}) = 0 \quad (h, k, l = 1, 2, \dots, n)$$

folgt wegen $W^{*(H)}(a) \subset W(a)$.

9. Satz 9: Die in $W(a)$ enthaltene Pseudobewertung $W^*(a)$ besitze die direkte Summendarstellung

$$W^*(a) \sim \sum_{K=1}^N W^{*(K)}(a)$$

und es seien

$$W_k^*(a), W_k^{*(1)}(a), W_k^{*(2)}(a), \dots, W_k^{*(N)}(a) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

die zu ihr und ihren Summanden gehörigen Komponenten in bezug auf $W_1(a), W_2(a), \dots, W_n(a)$. Dann gelten die direkten Summendarstellungen:

$$W^*(a) \sim \sum_{K=1}^N W^{*(K)}(a) \text{ mit } W^{*(K)}(a) \sim \sum_{k=1}^n W_k^{*(K)}(a) \quad (K=1, 2, \dots, N),$$

$$W^*(a) \sim \sum_{k=1}^n W_k^*(a) \text{ mit } W_k^*(a) \sim \sum_{K=1}^N W_k^{*(K)}(a) \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

$$W^*(a) \sim \sum_{K=1}^N \sum_{k=1}^n W_k^{*(K)}(a).$$

Beweis: Diese Summendarstellungen folgen sofort aus den beiden Sätzen 2 und 7. Sie sind direkt auf Grund des vorigen Satzes, da mit einem System von Pseudobewertungen auch jedes Teilsystem unabhängig ist.

Lassen wir im vorigen Satz $W(a)$ und $W^*(a)$ zusammenfallen, so kommen wir endlich zu folgendem Resultat:

Hauptsatz: Die Pseudobewertung $W(a)$ von R lasse die zwei direkten Summendarstellungen

$$W(a) \sim \sum_{k=1}^n W_k(a) \quad \text{und} \quad W(a) \sim \sum_{K=1}^N W^{(K)}(a)$$

zu, in denen n , bzw. N Summanden auftreten. Dann gibt es nN weitere Pseudobewertungen

$$W_k^{(K)}(a) \quad \left(\begin{array}{l} k=1, 2, \dots, n \\ K=1, 2, \dots, N \end{array} \right)$$

von R , so dass die direkten Summendarstellungen

$$\begin{aligned} W(a) &\sim \sum_{k=1}^n \sum_{K=1}^N W_k^{(K)}(a) & W_k(a) &\sim \sum_{K=1}^N W_k^{(K)}(a) & (k=1, 2, \dots, n) \\ & & W^{(K)}(a) &\sim \sum_{k=1}^n W_k^{(K)}(a) & (K=1, 2, \dots, N) \end{aligned}$$

bestehen. Sind die Pseudobewertungen $W_1(a), W_2(a), \dots, W_n(a)$ irreduzibel und von der uneigentlichen Pseudobewertung $U(a) \equiv 0$ verschieden, sind ferner die Pseudobewertungen $W^{(1)}(a), W^{(2)}(a), \dots, W^{(N)}(a)$ ebenfalls alle ungleich $U(a)$, so müssen somit diese beiden Systeme von n , bzw. N Pseudobewertungen aus (bis auf die Reihenfolge) gliedweise äquivalenten Gliedern bestehen, und es ist insbesondere $n=N$.

Zum Abschluss sei noch erwähnt, dass die Komponenten $W_k^{(K)}(a)$ der auf zwei Arten:

$$W(a) \sim \sum_{k=1}^n W_k(a) \quad \text{und} \quad W(a) \sim \sum_{K=1}^N W^{(K)}(a)$$

als direkte Summe dargestellten Pseudobewertung $W(a)$ sich auch symmetrisch in beiden Zerlegungen darstellen lassen. Versteht man nämlich unter

$$d_1^{(k)}, d_2^{(k)}, d_3^{(k)}, \dots \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

$$\text{bzw. } D_1^{(K)}, D_2^{(K)}, D_3^{(K)}, \dots \quad (K = 1, 2, \dots, N)$$

n , bzw. N unendliche Folgen aus R mit

$$\lim_{m \rightarrow \infty} W_h(d_m^{(k)} - \delta_{hk}) = 0 \quad (h, k = 1, 2, \dots, n),$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} W^{(H)}(D_m^{(K)} - \delta_{HK}) = 0 \quad (H, K = 1, 2, \dots, N),$$

so wird, wie man leicht zeigt:

$$W_k^{(K)}(a) = \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ \mu \rightarrow \infty}} W(a d_m^{(k)} D_\mu^{(K)}),$$

und zwar darf hier der Limes in irgend einer Reihenfolge ausgeführt werden. Somit sind die Komponenten der $W^{(K)}(a)$ ($K = 1, 2, \dots, N$) in bezug auf die $W_k(a)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) äquivalent den Komponenten der $W_k(a)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) in bezug auf die $W^{(K)}(a)$ ($K = 1, 2, \dots, N$).

10. Der Hauptsatz erlaubt zu zeigen, dass der Ring P aller Polynome $a(x)$ in x mit rationalen Koeffizienten nicht elementar ist, d.h. dass nicht jede Pseudobewertung dieses Ringes sich als direkte Summe endlich vieler irreduzibler Pseudobewertungen darstellen lässt. Offenbar werden nämlich für jede natürliche Zahl n durch

$$W_n^*(a) = \max_{k=n, n+1, \dots} \left(\left| a \left(\frac{1}{k} \right) \right|, |a(0)| \right) \quad \text{und} \quad W_n^*(a) = \left| a \left(\frac{1}{n} \right) \right|$$

zwei Pseudobewertungen von P definiert, und es ist offenbar

$$W_1(a) \sim W_n(a) + \sum_{k=1}^{n-1} W_k^*(a) \quad (n = 2, 3, \dots)$$

eine Darstellung von $W_1(a)$ als direkte Summe n unabhängiger Pseudobewertungen. Da n beliebig gross gewählt werden kann, so folgt die Behauptung.

Dieses Beispiel widerlegt übrigens meine Vermutung (S. Seite 118 unten, im ersten Teil dieser Arbeit), dass mit einem Ring R auch der Ring aller Polynome in einer Unbestimmten x mit Koeffizienten aus R elementar sei.

Groningen, November 1935.

Geology. — Über Aptychenfunde auf Cuba. Von Prof. Dr. FRIEDRICH TRAUTH (Wien). (Communicated by Prof. L. RUTTEN).

(Communicated at the meeting of November 30, 1935).

Während wir von dem Vorkommen lamelloser Aptychen — also von „*Lamellaptychi*“ im Sinne unserer Aptychensystematik (vgl. TRAUTH, 1927, p. 228—239) — auf der Insel Cuba zum erstenmale durch jene Funde Kenntnis erhalten hatten, die Barnum BROWN 1919 in der Sierra de los Organos (Organ Mountains) der westcubanischen Provinz Pinar del Rio gemacht und dann 1921 Marjorie O'CONNELL (l.c.) als drei neue Spezies „*Aptychus cristobalensis*, *A. cubanensis* und *A. pimientensis*“ eingehend beschrieben hat, ist es vor zwei Jahren — 1933 — Herrn Professor Dr. L. RUTTEN von der Universität Utrecht zusammen mit vier seiner Dissertanten¹⁾ bei gemeinsamen geologischen Exkursionen durch die Insel gelungen, an mehreren in B. BROWN's Aufsammlungen noch nicht vertretenen Lokalitäten wieder eine grössere Anzahl von Lamellaptychen zu entdecken, die er mir während des heurigen Sommers zum genaueren Studium übermittelt hat²⁾.

Seiner Anregung folgend, erlaube ich mir nun hier über das Ergebnis dieser meiner Untersuchung zu berichten, die mir vor allem auch zu einer Nachprüfung der von M. O'CONNELL aufgestellten „Arten“ auf Grund ihrer seinerzeitigen Veröffentlichung (1921, l.c.) Anlass gegeben und mich dahin geführt hat, sie des Wesentlichen mit schon früher aus der Alten Welt (Europa, Cap Verden) bekannten Formen zu identifizieren und sie also der Priorität nach auch mit deren Namen zu belegen.

Barnum BROWN's, resp. MARJORIE O'CONNELL's Lamellaptychen — 17 Exemplare an Zahl — stammen, wie schon gesagt, aus Westcuba und die von Prof. L. RUTTEN und seinen Schülern aufgefundenen und mehr als 30 zählenden Valven (weit vorherrschend Einzelklappen und nur wenige Klappenpaare) teils aus Westcuba (20 Stück), teils aus Mittelcuba (9 Stück) und teils aus dem westlichen Ostcuba (2 Stück). Von RUTTEN's Kollektion habe ich allerdings nur ca. 18 Valven spezifisch bestimmen können, wogegen die übrigen infolge unzulänglicher Überlieferung keine Artdiagnose gestatteten. Dazu kommen schliesslich noch einige dem geolo-

¹⁾ Den Herren H. J. MAC GILLAVRY, M. G. RUTTEN, A. THIADENS und L. W. J. VERMUNT.

²⁾ Herr Professor RUTTEN hat mir von diesem seinen Aptychenmaterial, das jetzt grösstenteils dem mineralogisch-geologischen Institut der Universität Utrecht gehört, einige Exemplare für das Naturhistor. Museum in Wien überlassen. Ich möchte ihm hiefür nochmals verbindlichst danken!

gisch-paläontologischen Institute der Universität Bonn gehörige Klappen aus Westcuba, die mir Herr Kollege Prof. E. JAWORSKI im Frühjahr 1934 übersandte und unter denen ich den *Lamellaptychus angulocostatus* (Pet.) samt seiner var. n. *longa* und var. *atlantica* (Henn.) und den *L. seranonis* (Coqu.) zu erkennen vermochte.

Die völlige oder weitgehende Übereinstimmung all dieser cubanischen Aptychen, ob sie nun da oder dort aufgefunden worden sind, und ihr Auftreten allenthalben in ganz gleichartigen und also augenscheinlich recht weit auf der Insel verbreiteten Schichten spricht offenbar für deren stratigraphische Einheitlichkeit. Es handelt sich dabei um einen vielfältigen Wechsel von frisch ziemlich dunkelgrauen, aber bei der Verwitterung weisslichgrau ausbleichenden oder infolge schwacher eisenschüssiger Beimengungen auch bräunlichgelb werdenden Schiefern — und zwar häufig Mergelschiefern — und Kalken (vgl. O'CONNELL, 1921, p. 1 und BROWN and O'CONNELL, 1922, p. 645).

Es sei hier zunächst eine Aufzählung unserer cubanischen Aptychenformen gegeben, deren einzelnen eingeklammert die ihnen zuzurechnenden „Spezies“ O'CONNELL's beigefügt werden:

?*Lamellaptychus rectecostatus* (Pet.) em. Trth.;

Lamellaptychus angulocostatus (Pet.) f. *typ.* (dazu *Aptychus pimientensis* O'Conn. *partim*);

Lamellaptychus angulocostatus (Pet.) var. n. *longa* (dazu *Aptychus pimientensis* O'Conn. *partim*);

Lamellaptychus angulocostatus (Pet.) var. *atlantica* (Henn.);

Lamellaptychus angulocostatus (Pet.) var. *cristobalensis* (O'Conn.) (d.i. *Aptychus cristobalensis* O'Conn.);

Lamellaptychus seranonis (Coqu.) (dazu *Aptychus cubanensis* O'Conn.);

Lamellaptychus f. ind., einige nicht genauer bestimmbare Valven.

Eine knappe Kennzeichnung dieser verschiedenen „Arten“ und „Varietäten“¹⁾ mit Angabe ihrer genaueren cubanischen Fundplätze soll dann später — auf p. 69 bis 75 — geboten und dabei zugleich auch durch die Zitierung der wichtigsten Synonyma aus dem Schrifttum meine Benennung der einzelnen Formen für die Fachgenossen begründet werden.

Was nun die Beurteilung des geologischen Alters der cubanischen Aptychenschichten betrifft, so hat ja bereits M. O'CONNELL 1921 l.c. eine auffällige „Ähnlichkeit“ ihrer Opercularformen mit solchen des europäischen Neokoms — wobei sie namentlich zutreffendst auf den *Aptychus angulocostatus* Pet. und auch, doch weniger

¹⁾ Eine eingehendere Charakterisierung derselben mit besonderer Berücksichtigung ihres Vorkommens in anderen und zwar zumal in den europäischen Gebieten bleibe meiner in Vorbereitung begriffenen Monographie der „Lamellaptychi des Malm und der Unterkreide“ vorbehalten.

zutreffend, auf den *Aptychus didayi* Coqu, hingewiesen hat¹⁾ — hervor gehoben und daraus folgenden Schluss gezogen (1921, p. 1): „From the field relations and the general stratigraphy, these strata appear to be of Upper Jurassic age, but the aptychi themselves possess certain characteristics which have heretofore been found only in Cretaceous species. Until further field work can be done it is impossible to state the exact age of the beds but it must be either Tithonian or Neocomian with the palaeontological evidence strongly favoring the latter”²⁾; und ferner (l.c. p. 6) hat die amerikanische Paläontologin noch den Satz hinzugefügt: „Either the Cuban species belong to the Cretaceous or else they are to be regarded as late Tithonian forerunners of the Cretaceous types”²⁾).

Ich selbst möchte mich aber nun nach dem eingehenden Studium der cubanischen Aptychen entschieden für ein neokomes — und zwar vermutlich unterneokomes — Alter derselben und also auch des sie einschliessenden Schichtkomplexes aussprechen. Dafür lässt sich die volle Übereinstimmung — und nicht etwa bloss beträchtliche Ähnlichkeit — einiger sehr bezeichnender cubanischer Opercularformen mit in Europa für die Neokomstufe der Kreideformation besonders charakteristischen Aptychen geltend machen. Es sind dies der *Lamellaptychus angulocostatus* (Pet.) mit seiner f. *typ.* und mit seiner var. *longa* Trth. und der *L. seranonis* (Coqu.)³⁾.

Was ferner den übrigens nicht ganz sicher determinierten *Lamellaptychus rectecostatus* (Pet.) anbelangt, so ist in Europa sein Hauptlager zwar das Tithon, doch steigt er hier immerhin gelegentlich auch ins ältere Neokom empor. Seine uns von Cuba — aus dem Badeort Saroa — bekanntgewordenen und, wie bemerkt, etwas fraglichen Valven liegen mit solchen des *L. angulocostatus* (Pet.) und *L. seranonis* (Coqu.) zusammen auf einer und derselben Kalkplatte und werden hier so jedenfalls auch neokomen und nicht oberjurassischen (tithonen) Alters sein.

Das Vorkommen der var. *atlantica* (Henn.) des *L. angulocostatus* (Pet.) in den Aptychenschichten Cubas und ebenso in der ihnen faziell recht ähnlichen aptychenführenden Plattenkalkbildung der Capverden-Insel

1) Eine dritte von O'CONNELL (1921, p. 6) mit den cubanischen *Lamellaptychi* in Vergleich gesetzte Opercularform ist ferner noch der oberkreidische (obersenone) *Aptychus insignis* Hébert, der aber gewiss in keiner näheren Verwandtschaft zu ihnen steht und seine einigermaßen an den *Lamellaptychus angulocostatus* (Pet.) erinnernde eckig-winkelige, „rückläufige“ Berippung ganz unabhängig und bloss konvergent zu letzterer Spezies erworben hat; er gehört dem wahrscheinlichst auf die Ammonitengattung *Baculites* beziehbaren Operculartypus *Rugaptychus* Trth. an und ist von mir (vgl. Ann. d. Naturhist. Mus. in Wien, 42. Bd. [1928] p. 122 u. 125) als *R. rugosus* (Shrp.) var. *insignis* Héb. bezeichnet worden.

2) Die Hervorhebung einzelner Worte durch Sperrdruck von mir vorgenommen.

3) Genauere Angaben über die stratigraphische (vertikale) Verbreitung der einzelnen Aptychenformen vgl. bei ihrer näheren Erörterung auf p. 69–74.

Mayo, aus welcher ja HENNIG (1913 l.c.) diese Valvenform zuerst beschrieben hat¹⁾, lässt uns beide Ablagerungen als wohl auch stratigraphisch ziemlich äquivalent betrachten.

Die „fractocoste“ var. *cristobalensis* (O'Conn.) des *L. angulocostatus* (Pet.) endlich ist meines Wissens bisher noch nirgends ausserhalb Cubas angetroffen worden.

Die in dieser Veröffentlichung besprochenen *Lamellaptychus*-Formen dürften fast alle die Deckel von *Haploceraten* (ev. von *Haploceras*) darstellen, von denen übrigens auch bereits vereinzelt kleine Gehäuse als die einzigen Ammonitenreste in den cubanischen Aptychenschichten aufgefunden worden sind (vgl. O'CONNELL, 1921, p. 1 u. 4 unt.—5 ob.). Nur der ?*Lamellaptychus rectecostatus* (Pet.) ist wahrscheinlichst als das Operculum einer *Oppelia* anzusehen.

ERÖTERUNG DER EINZELNEN APTYCHENFORMEN.

?*Lamellaptychus rectecostatus* (Pet.) em. Trauth.

1854. *Aptychus rectecostatus*, PETERS, 1854, p. 442 (*partim*).

1863. *Aptychus* von *Ammonites Bous*, OPPEL, 1863, p. 253, Taf. 70, Fig. 1.

1863. *Aptychus* von *Ammonites euglyptus* (*Aptychus euglyptus*), OPPEL, 1863, p. 254 (*partim*), Taf. 70, Fig. 4.

1870. *Aptychus* von *Oppelia steraspis*, WAAGEN, 1870, p. 210, Taf. XL, Fig. 4.

1886. *Aptychus Beyrichi*, SOKOLOFF, 1886, p. 25 (*partim*), Taf. III, Fig. 4.

1887—88. *Aptychus* von *Ammonites lingulatus solenoides*, QUENSTEDT, 1887—88, p. 1092, Taf. 126, Fig. 8.

Einige jugendliche Valven des cubanischen Fossilienmaterials Prof. RUTTEN's, deren grösste ca. 14 mm lang ist, mögen — doch infolge ihres nicht ganz vollkommenen Erhaltungszustandes nur mit einer gewissen Reserve — auf den *Lamellaptychus rectecostatus* (Pet.) em. Trth. bezogen werden.

Die Hauptcharakteristika dieser Spezies bestehen darin, dass ihre imbrikat Konvexseiterippen an den Valvenflanken überhaupt keine oder höchstens nur in frühester Jugend — bis zur Erreichung einer Klappenbreite von 8 mm — eine leichte Sigmoidalbiegung ausführen, ansonsten aber durchaus gerade und also ohne eine Richtungsablenkung bis zum Externrand weiterziehen und hier schliesslich auch so gerade ausstreichen²⁾.

¹⁾ Und zwar als oberstjurassisch und nicht, wie wir es für weit plausibler erachten, als älterneokom.

²⁾ Zum Unterschiede von dem dem *Lamellaptychus rectecostatus* geologisch gleichalterigen und weitgehend ähnlichen und vor allem wie er am Externrande gerade ausstreichende Rippen darbietenden *L. beyrichi* (Opp.), bei welchem aber der Sigmoidalschwingung der Rippen noch über eine Valvenbreite von 8 mm hinaus anhält. Zu *L. beyrichi* dürfte wohl auch das Operculum zu rechnen sein, welches HENNIG (1913, p. 155, Taf. II, Fig. 2) als *Aptychus*, cf. *euglyptus* Opp. aus den (vermutlich neokomen) Plattenkalken der Capverden-Insel Mayo beschrieben hat.

Die Zugehörigkeit des *Lamellaptychus rectecostatus* zur Ammonitengattung *Oppelia* ist in Europa durch mehrere *in situ*-Funde erwiesen worden.

Vorkommen: Die vorliegenden 4 westcubanischen Valvenexemplare stammen aus dem Badeort Saroa in der Provinz Pinar del Rio (RUTTEN's Lokalitäts-No. „V. 826“) und liegen zusammen mit *Lamellaptychus angulocostatus* (Pet.) und *L. seranonis* (Coqu.) auf derselben Gesteinsplatte.

Im ausseralpin-mitteuropäischen Oberjura nur recht spärlich vertreten, erlangt der *L. rectecostatus* im alpin-mediterranen Gebiete Europas eine beträchtliche Häufigkeit und Verbreitung und ist uns hier aus dem höheren Malm (Kimmeridge, vorwiegend aber Tithon) und auch, jedoch freilich schon wieder seltener aus dem (wohl älteren) Neokom bekannt geworden.

Lamellaptychus angulocostatus (Pet.) f. typ.

1854. *Aptychus angulocostatus*, PETERS, 1854, p. 440—441.

1857. *Trigonellites Didayi*, OOSTER, 1857—63, II. Partie, p. 28—30 u. Tafelerklärung p. VI (partim), Taf. 7, Fig. 9, 17 (non ceterae fig. = *L. didayi* [Coqu.]).

1858. *Aptychus angulicostatus*, PICTET et LORIOU, 1858, p. 46—48, Taf. X, Fig. 3, 5a—c, 6a—c, 7, 8a—d, 9, 10—12 (non Fig. 4 = *L. angulocostatus* [Pet.] var. n. *longa*).

1892. *Aptychus angulicostatus*, TOULA, 1892, p. 34, 69, Taf. VI, Fig. 11.

1921. *Aptychus pimientensis*, O'CONNELL, 1921, p. 10—12, Fig. 15, 16, 18 (non Fig. 17 = *L. angulocostatus* [Pet.] var. n. *longa*).

Die von O'CONNELL l.c. als „*Aptychus pimientensis* n. sp.“ beschriebenen und abgebildeten cubanischen Valven, deren grösste eine Länge von 19 mm besitzt, entsprechen gestaltlich und besonders skulpturell durch die eckig-winkelig apikalwärts zurücklaufenden Konvexeiterippen augenscheinlich bestens den europäischen Vertretern des typischen *Lamellaptychus angulocostatus* (Pet.) und müssen daher meiner Ansicht nach auch mit ebendiesem Namen angesprochen werden.

Von der var. n. *longa* derselben Spezies, der ich die in O'CONNELL's Fig. 17 dargestellte Klappe zurechne (vgl. p. 71), unterscheidet sich die f. typ. durch ihre weniger schlanke Gestalt (mit Breitenindex $B:L \geq 0.40$), von der var. *cubanensis* (O'Conn.) durch das Fehlen einer knickartigen Ablenkung in der dem Lateralrand konform gehenden Laufstrecke der Rippen und von der var. *atlantica* (Henn.) durch das völlige oder fast völlige Unterbleiben einer schliesslichen Umwandlung der eckig-winkelligen in eine „*seranonis*-artige“ kurvige Rückbeugung der Rippen nachbarlich des Externrandes ¹⁾).

Wenn O'CONNELL (l.c. p. 12) dem mit *Lamellaptychus angulocostatus* identen *Aptychus pimientensis* als Operculum auf die Ammonitengattung

¹⁾ Nur die letzte der vollständigen rückläufigen Rippen mag ev. eine bogenförmige Rückkrümmung ausführen, was aber dann wohl schon einen Übergang der „f. typ.“ zur var. *atlantica* des *L. angulocostatus* andeuten dürfte (vgl. p. 72, Fussnote 2).

Oppelia zu beziehen geneigt ist, so möchte ich ihn — so wie auch den *L. seranonis* (Coqu.) und *L. didayi* (Coqu.) — eher für ein solches von Haploceraten (ev. *Haploceras*) halten (vgl. auch TRAUTH, 1927, p. 239).

Vorkommen: Nach O'CONNELL am Mt. Pimiento im Rio San Cristobal 5 Meilen N der Stadt San Cristobal (Lokalitäts-No. „S. C. 5“, 3 Exemplare) und dann NE des Mt. Pimiento im Rio Hondo 7 Meilen NE von San Cristobal (Lokalitäts-No. „S. C. 3“, 1 Exemplar) in der westcubanischen Provinz Pinar del Rio; ferner nach L. RUTTEN's Kollektion S von Bahia Honda (Lokalitäts-No. „V. 868“, 2 Exemplare) und im Badeort Saroa (Lokalitäts-No. „V. 826“, 4 Exemplare) gleichfalls in der westcubanischen Provinz Pinar del Rio und dann noch zwischen Encrucijada und Santa Clara (Lokalitäts-No. „M. 520“, 2 Exemplare) im nördlichen Teil der mittlercubanischen Provinz Santa Clara; endlich durch 1 Exemplar aus Westcuba auch in E. JAWORSKI's Aptychenmaterial repräsentiert.

Lamellaptychus angulocostatus ist eine im Neokom des alpin-mediterranen Gebietes (Spanien, Südfrankreich, Alpen, Karpathen, Algerien) weit verbreitete Spezies. In der Berrias-Stufe freilich wohl noch ganz sporadisch erscheinend, charakterisiert sie hingegen in grösserer Häufigkeit das Valendis und vor allem aber das ganze Hauterive.

Lamellaptychus angulocostatus (Pet.) var. n. *longa*.

1857. *Trigonellites Didayi*, OOSTER, 1857—63, p. 28—30 (*partim*), Tafelerklärung p. VI, Taf. 7, Fig. 14, 15 (non *ceterae* fig.!)

1858. *Aptychus angulicostatus*, variété *allongée*, PICTET et LORIOL, 1858, p. 46—48 (*partim*), Taf. X, Fig. 4 (non Fig. 3, 5—12 = *L. angulocostatus* [Pet.] f. *typ.*).

1915. *Aptychus rectecostatus*, JEKELIUS, 1915, p. 124, Taf. X, Fig. 2.

1921. *Aptychus pimientensis*, O'CONNELL, 1921, p. 11—12 (*partim*), Fig. 17 (non Fig. 15, 16, 18 = *L. angulocostatus* [Pet.] f. *typ.*).

Dem Vorgange PICTET's und LORIOL's (1858 l.c.) folgend, möchte ich die durch eine besondere Schlankheit und damit durch einen Breitenindex $B : L < 0.40$ von der gewöhnlichen Ausbildung („f. *typ.*“, vgl. p. 70) abweichenden Klappen des *Lamellaptychus angulocostatus* (Pet.) als seine var. *longa* bezeichnen. Ausser der von O'CONNELL l.c. Fig. 17 unter dem Namen *Aptychus pimientensis* O'Conn. abgebildeten Valve (mit $B = 8$ mm, $L = 21.5$ mm, $B : L = 0.37$) ist hierher noch ein mir von Prof. E. JAWORSKI und ein mir von Prof. L. RUTTEN vorgelegtes Exemplar (letzteres ein Valvenpaar mit $B = 10$ mm, $L = 28$ mm und $B : L = 0.36$) zu rechnen.

Vorkommen: Der Fundort von O'CONNELL's Valve liegt NE des Mt. Pimiento und 7 Meilen NE von San Cristobal am (oder im) Rio Hondo (Lokalitäts-No. „S. C. 3“) in der westcubanischen Provinz Pinar del Rio, der von JAWORSKI's Stück gleichfalls in Westcuba (genaue Lokalität mir unbekannt) und der von RUTTEN's Exemplar zwischen Encrucijada und Santa Clara im nördlichen Teil der mittlercubanischen Provinz Santa Clara (Lokalitäts-No. „M. 520“). Im alpinmediterranen Gebiete Europas (Alpen, Südkarpathen) ist diese Aptychenvarietät stets an das Neokom geknüpft.

Lamellaptychus angulocostatus (Pet.) var.
atlantica (Henn.)

1913. *Aptychus atlanticus*, HENNIG, 1913, p. 155, Taf. II, Fig. 1a—b.

Wie ich an den Originalvalven des von HENNIG l.c. aus den ihm oberstjurassisch dünkenden, aber vermutlich eher neokomen Plattenkalken der Capverden-Insel Mayo beschriebenen „*Aptychus atlanticus* Henn n. sp.” feststellen konnte ¹⁾, handelt es sich dabei meines Erachtens wohl nur um eine Varietät des *Lamellaptychus angulocostatus* (Pet.), welche bloss bis zur Erreichung einer rel. bescheidenen Grösse die Konvexeiterippen so wie bei der „*forma typica*“ des *L. angulocostatus* (vgl. p. 5) apikalwärts scharfeckig-winkelig rückgebeugt zeigt, dann aber die Rückbeugung analog dem *L. seranonis* (Coqu.) bogig oder abgeplattet-kurvig ausführt ²⁾. Während dieser Wechsel von der „angulocostaten“ zur „seranonis“-artigen Rippenausbildung an HENNIG's Originalstücken etwa bei einer Valvenlänge (*L*) von 11 mm zu beobachten ist, haben wir ihn an einigen offenbar derselben Varietät zuzurechnenden cubanischen Valven, deren ansehnlichste ca. 30 mm lang erscheint, bei einer *L* von etwa 12 bis 25 mm (an den verschiedenen Exemplaren also bei einigermaßen differenter Grösse) eintreten gesehen.

In das Merkmal dieses Skulpturwechsels teilt sich die erörterte var. *atlantica* (Henn.) auch ganz mit den von O'CONNELL „*Aptychus cristobalensis* n. sp.” geheissenen Klappen, die aber überdies noch eine charakteristische knickartige Ablenkung („fractocoste“ Ausbildung) der Rippen wahrnehmen lassen und von mir deshalb als eine besondere Spielart — var. *cristobalensis* (O'Conn.) — des *L. angulocostatus* betrachtet werden (vgl. p. 73).

Vorkommen: Prof. L. RUTTEN's Aptychenkollektion enthält 1 Exemplar der var. *atlantica* aus der Gegend zwischen Encrucijada und Santa Clara im nördlichen Teil der mittlercubanischen Provinz Santa Clara (Lokalitäts-No. „M. 519"); ferner 1 Exemplar aus der Gegend S von Toro (Lokalitäts-No. „A. 653") und 2 Exemplare vom Badeort Saroa (Lokalitäts-No. „V. 826"), beide letztgenannte Örtlichkeiten in der westcubanischen Provinz Pinar del Rio gelegen; aus Westcuba (genaue Lokalität unbekannt) stammt auch eine mir 1934 von Prof. E. JAWORSKI vorgelegte derartige Valve.

¹⁾ Ich möchte hier Herrn Kollegen Prof. Dr. W. O. DIETRICH für die Liebenswürdigkeit danken, dass er mir seinerzeit die Untersuchung dieser dem geolog.-paläontolog. Museum der Universität Berlin gehörigen Fossilien durch ihre Ausleihung nach Wien ermöglicht hat.

²⁾ Bei dem Vorhandensein von bloss einer einzigen auf die eckig-winkligen folgenden bogig-rückgebeugten Rippe mag man wohl noch von dem eigentlichen („f. typ.") *Lamellaptychus angulocostatus* sprechen, aber immerhin durch letztere Eigenheit bereits dessen Übergang zur var. *atlantica* angedeutet erblicken.

Lamellaptychus angulocostatus (Pet.) var.
cristobalensis (O'Conn.)

1921. *Aptychus cristobalensis*, O'CONNELL, 1921, p. 7—8, Fig. 7, 8.

Durch die Valvengestalt und die Ausbildung der anfangs ganz so wie bei dem typischen *Lamellaptychus angulocostatus* (vgl. p. 70) eckig-winkelig und erst in mehr fortgeschrittenem Wachstumsstadien so wie bei dem *L. seranonis* (Coqu.) (vgl. unten) bogig apikalwärts rückgebeugten Konvexseiterippen weitestgehend der eben vorhin (p. 72) besprochenen var. *atlantica* (Henn.) des *L. angulocostatus* entsprechend, unterscheiden sich die von O'CONNELL l.c. Fig. 7—8 unter einem besonderen neuen „Spezies“-Namen — als „*Aptychus cristobalensis*“ — dargestellten Valven nur durch eine (mehr oder minder deutliche) knickartige („fractocoste“) Ablenkung im Verlaufe der Rippen und zwar lateralrandwärts nachbarlich der vom Wirbel zur Marginalgegend ziehenden (und demnach apikaldiagonalen), etwa kielartigen Wölbung („convex radial ridge“ bei O'CONNELL l.c.). Es handelt sich bei dieser Varität des *L. angulocostatus* also sozusagen um eine „fractocoste“ Ausbildung der var. *atlantica* (Henn.), die man, läge nicht bereits O'CONNELL's Namensprägung vor, eben auch var. *atlantica-fractocosta* heissen könnte. Von den bei O'CONNELL l.c. abgebildeten beiden Exemplaren weist das grössere eine Valvenlänge $L = \text{ca. } 33 \text{ mm}$ auf.

Im Gegensatz zu O'CONNELL möchten wir diese Spielart eher auf einen Haploceraten (ev. *Haploceras*), wie solche ja auch bereits in unseren cubanischen Aptychenschichten vereinzelt beobachtet worden sind (vgl. p. 69), als auf eine *Oppelia* beziehen.

Vorkommen: Nach O'CONNELL NE des Mt. Pimiento und 7 Meilen NE von San Cristobal am (oder im) Rio Hondo (Lokalitäts-No. „S. C. 3“, 3 Exemplare) und ferner an der Finca von Rafael Begoa 9 Meilen N von San Cristobal am (oder im) Rio San Cristobal (Lokalitäts-No. „S. C. 2“, 1 Exemplar) in Westcuba.

Lamellaptychus seranonis (Coqu.)

1841. *Aptychus Seranonis*, COQUAND, 1841, p. 390, 391, Taf. IX, Fig. 13.

1858. *Aptychus Seranonis*, PICTET et LORIOL, 1858, p. 48—50 (*partim*), Taf. XI, Fig. 1, 2, 4, 7, 8 (non Fig. 3, 5, 6 = *Lamellaptychus excavatus* Trauth n.n.¹⁾).

1867. *Aptychus Seranonis*, PICTET, 1867, p. 123—124 (*partim*), Taf. 28, Fig. 9b (non *ceterae fig.*!).

1868. *Aptychus Gümbeli*, WINKLER, 1868, p. 29, Taf. 4, Fig. 10.

1921. *Aptychus cubanensis*, O'CONNELL, 1921, p. 9—10, Fig. 9—13, ? 14.

¹⁾ Dies ist eine gestaltlich an den *L. seranonis* (Coqu.) erinnernde und dabei eine mehr oder minder deutliche Flankendepression — lateralrandwärts von einer apikaldiagonalen Kielwölbung — zeigende Spezies, deren Rippen sich dem Externrand kurvig anzu-schmiegen trachten, ohne aber irgendwo eine apikalwärts gerichtete Rückbiegung aufzuweisen. Ebenhiedurch lässt sie sich von dem *L. seranonis* sicher unterscheiden.

Die von O'CONNELL l.c. unter dem Namen einer besonderen, neuen Spezies — *Aptychus cubanensis* — bekanntgemachten Klappen, deren ansehnlichste ungefähr 22 mm lang ist, stimmen meines Dafürhaltens fast durchwegs so gut mit dem europäischen *Lamellaptychus seranonis* (Coqu.) überein, dass ich für sie auch diese Bezeichnung als gerechtfertigt erachte und dasselbe gilt wohl ferner noch für eine etwas defekte, aber ergänzt gedacht gleichfalls ca. 22 mm lang zu schätzende Valve in Prof. RUTTEN's cubanischer Fossilienaufsammlung.

Der *Lamellaptychus seranonis* (Coqu.) gehört so wie der *L. angulocostatus* (Pet.) zu den apikalwärts rückläufige Konvexeiterippen aufweisenden „Arten“, doch erfolgt die Rückbeugung dieser Rippen (zum Unterschiede von der letztgenannten Spezies) nie oder fast nie eckig-winkelig, sondern des Wesentlichen bogig, wobei die Rippen dort, wo sie sich in dieser Weise zum Symphysenrand emporkrümmen, häufig rel. gröber (resp. auch abgeplattet-verbreitert) und mit ihren Firsten etwas weiter von einander distanziert erscheinen.

Wenn O'CONNELL (l.c. p. 10) die ebenerörterte Opercularform von einem *Haploceras* hat herleiten wollen, so dünkt dies auch mir recht plausibel, ist aber vorläufig noch durch keinen in situ-Fund derselben in einem Ammonitengehäuse erwiesen worden.

Vorkommen: M. O'CONNELL's Valven stammen von der Finca von Rafael Begoa am (bzgl. im) Rio San Cristobal 9 Meilen N der Stadt San Cristobal (Lokalitäts-No. „S. C. 2“ und „S. C. 4“, insgesamt 8 Exemplare), die oberwähnte Klappe der Kollektion L. RUTTEN's aus dem Badeort Saroa (Lokalitäts-No. „V. 826“) in der Provinz Pinar del Rio und eine in E. JAWORSKI's Aptychensuite enthaltene gleichfalls wie all die eben angeführten aus Westcuba.

Während der *L. seranonis* (Coqu.) im Tithon des alpinmediterranen Europas nur ganz sporadisch angetroffen wird, ist er daselbst im Neokom — und zwar von der Berrias- bis in die untere Hauterive-Stufe — ziemlich häufig und weitverbreitet (Spanien, Südfrankreich, Alpen, Karpathen).

Lamellaptychus f. indet.

Mehrere bis ca. 20 mm lange Valven, die infolge zu dürftiger Erhaltung oder vorwaltender Darbietung der Konkavseite — bei fester Einbettung der Konvexeite ins Gestein — bloss dem Typus (der „Gattung“) *Lamellaptychus*, aber keiner besonderen Form („Art“) zuweisbar sind, liegen mir in der Kollektion Prof. RUTTEN's von drei Fundstellen vor.

Vorkommen: Corazón de Jesús (3 Exemplare mit der Lokalitäts-No. „H. 487“) und Gegend N von San Domingo (1 Exemplar mit der Lokalitäts-No. „L. 398“), beide Örtlichkeiten im nördlichen Teil der Provinz Santa Clara in Mittelcuba; ferner Sierra de Camajan (2 Exemplare mit der Lokalitäts-No. „A. 569“) in der Provinz Camaguey des westlichen Ostcubas. Die diese Fossilien enthaltenden Kalk- oder Mergelschiefer-Platten, die hier vorläufig noch keine anderen „artlich“ bestimmbaren

Klappen geliefert haben, harmonieren lithologisch völlig mit den aptychen-führenden Schichten der westcubanischen Sierra de los Organos und werden daher wohl auch ganz gleichen geologischen Alters sein.

Z u s a m m e n f a s s u n g.

Die Untersuchung der bisher in verschiedenen Regionen Cubas — hauptsächlich aber in der westcubanischen Provinz Pinar del Rio — aufgefundenen Aptychen hat für den sie enthaltenden Schichtkomplex, eine Wechselfolge von frisch ziemlich dunkelgrauen, bei der Verwitterung jedoch ausbleichenden Kalken und mergeligen Schiefern, ein *neokomes* (und zwar wohl unterneokomes) Alter ergeben. Denn die p. 69—74 charakterisierten „Arten“ und „Varietäten“ entsprechen grösstenteils aus dem Neokom des alpin-mediterranen Europas und der Cap Verden (Insel Mayo) bekannten *Lamellaptychus*-Formen, deren Namen aus Prioritätsgründen den Vorrang vor den 1921 von M. O'CONNELL für die cubanischen Opercula (resp. für einige derselben) geprägten Bezeichnungen besitzen müssen.

LITERATURVERZEICHNIS.

1922. BROWN, Barnum, and Marjorie O'CONNELL, Correlation of the Jurassic Formations of Western Cuba. Bull. of Geol. Soc. of America, **33**, p. 639 (New York).
1841. COQUAND, H., Mémoire sur les Aptychus. Bull. de la Soc. géol. de France, **12** (1840—41), p. 376 (Paris).
1913. HENNIG, E., Aptychen von den Cap Verdeschen Inseln. Zeitschr. d. Deutsch. geol. Ges., A. Abhandl., **65**, p. 151 (Berlin).
1915. JEKELIUS, E., Die mesozoischen Faunen der Berge von Brassó. II. Die Neokom-fauna von Brassó. Mitt. aus d. Jahrb. d. kgl. ung. geol. Reichsanst., **23**, 2. Heft (Budapest).
1921. O'CONNELL, Marjorie, New species of Ammonite opercula from the mesozoic rocks of Cuba. Americ. Mus. of Nat. Hist.: Americ. Mus. Novitates, No. 28 (New York).
- 1857—63. OOSTER, W. A., Pétrifications remarquables des Alpes Suisses. Catalogue des Céphalopodes fossiles des Alpes Suisses etc., II. Partie (1857) (Genève).
1863. OPPEL, A., Ueber jurassische Cephalopoden. Palaeont. Mitth. aus d. Mus. d. kgl. bayr. Staates, **1**, Text p. 127 u. Atlas (Stuttgart).
1854. PETERS, K., Die Aptychen der österreichischen Neocomien- und oberen Juraschichten. Jahrb. d. k. k. geol. Reichsanst., **5**, p. 439 (Wien).
1867. PICTET, F.—J., Mélanges paléontologiques. II. livraison: Études paléontologiques sur la faune à Terebratula diphyoïdes de Berrias (Ardèche), p. 122. Mém. de la Soc. de phys. et d'hist. nat. de Genève, **17**, 1. partie (Genève).
1858. PICTET, F.—J., et P. DE LORIOL, Description des fossiles contenus dans le Terrain Néocomien des Voirons. Mat. pour la Paléont. Suisse, II. sér. (Genève).
- 1887—88. QENSTEDT, F. A., Die Ammoniten des schwäbischen Jura. III. Bd. Der weisse Jura. Text u. Atlas (Stuttgart).
1886. SOKOLOFF, W. D., Couches tithoniques de la Crimée (Russ. m. français. Résumé). Mat. z. Geol. Russl., **13**. Kais. russ. mineralog. Ges. (St. Petersburg).
1892. TOULA, F., Geologische Untersuchungen im östlichen Balkan etc. II. Abth., Denkschr. d. k. Ak. d. Wiss., math.-nat. Cl., **59**, p. 422 (34) (Wien).

1927. TRAUTH, F., Aptychenstudien I. Über die Aptychen im Allgemeinen. Ann. d. Naturhist. Mus., **41**, p. 171 (Wien).
1870. WAAGEN, W., Über die Ansatzstelle der Haftmuskeln bei Nautilus und den Ammonoiden. Palaeontogr. **17**, p. 185 (Cassel).
1868. WINKLER, G. G., Versteinerungen aus dem bayrischen Alpengebiet mit geognostischen Erläuterungen. I. Die Neocomformation des Urschlauerachenthales bei Traunstein mit Rücksicht auf ihre Grenzschichten (München).

Geology. — *The pleistocene human skull from Hengelo. I. Geological-palaeontological part.* By F. FLORSCHÜTZ and I. M. VAN DER VLERK. (Communicated by Prof. J. BOEKE).

(Communicated at the meeting of November 30, 1935).

During the excavations undertaken by the municipality of Hengelo (Overijssel) for the construction of an oil harbour on the Twenthe canal, about 2 kilometers south of the railway station, the workmen turned up not only some interesting remains of a variety of mammals but even a part of a human skull.

By the courtesy of the municipality — we have here to thank the Director of the Works, Mr. M. SCHEFFER, engineer, as well as Mr. A. A. GUIKINK, municipal inspector, and Mr. A. SMIT, inspector „Nederlandsche Heidemaatschappij” — we were permitted to make an examination of the ground where the skull had been found. The section is shown on page 2.

Apparently the beds here mentioned form part of a series of deposits, partly fluvatile, partly limnic, partly aeolic and partly organogene, which in Twenthe filled up the depressions between the hills during the Riss-Würm Interglacial and the Würm Glacial Stage. These are the beds which on the Government Geological Survey map¹⁾ are marked as “postglaciale dalopvulling” (= postglacial valley filling) or “laagterras” (= lower terrace) (II 8).

The section of the oil harbour may lithologically be compared with that which a few years ago was examined in the foundation pit for a sluice on the Twenthe canal, about 100 meters further south²⁾. The thickness of the beds, however, differs somewhat.

The bottom of the oil harbour is formed by a coarse grey sand with gravel lenses (horizon a). In this we found remains of a tundra vegetation (*Dryas octopetala*, *Salix reticulata*, *Carex aquatilis*, etc.) and moreover a condylus medialis of the thigh bone of *Elephas primigenius* Blum.³⁾

¹⁾ H. D. M. BURCK, leaf 28IV (Almeloo) and P. TESCH, leaf 34II (Groenloo).

²⁾ F. FLORSCHÜTZ. — Palaeobotanisch onderzoek van jong-pleistoceene afzettingen in het Oosten van Overijssel. — Proc. Kon. Akad., Vol. **37**, N^o. 5, 1934, pp. 297—301.

³⁾ All remains of mammals here mentioned, brought to light in the excavations for the Twenthe canal, have come into the possession of the National Geological Museum at Leyden, by kind permission of the “Rijkswaterstaat”. A description of these bones is being prepared.

+ N.A.P. = sea level at Amsterdam

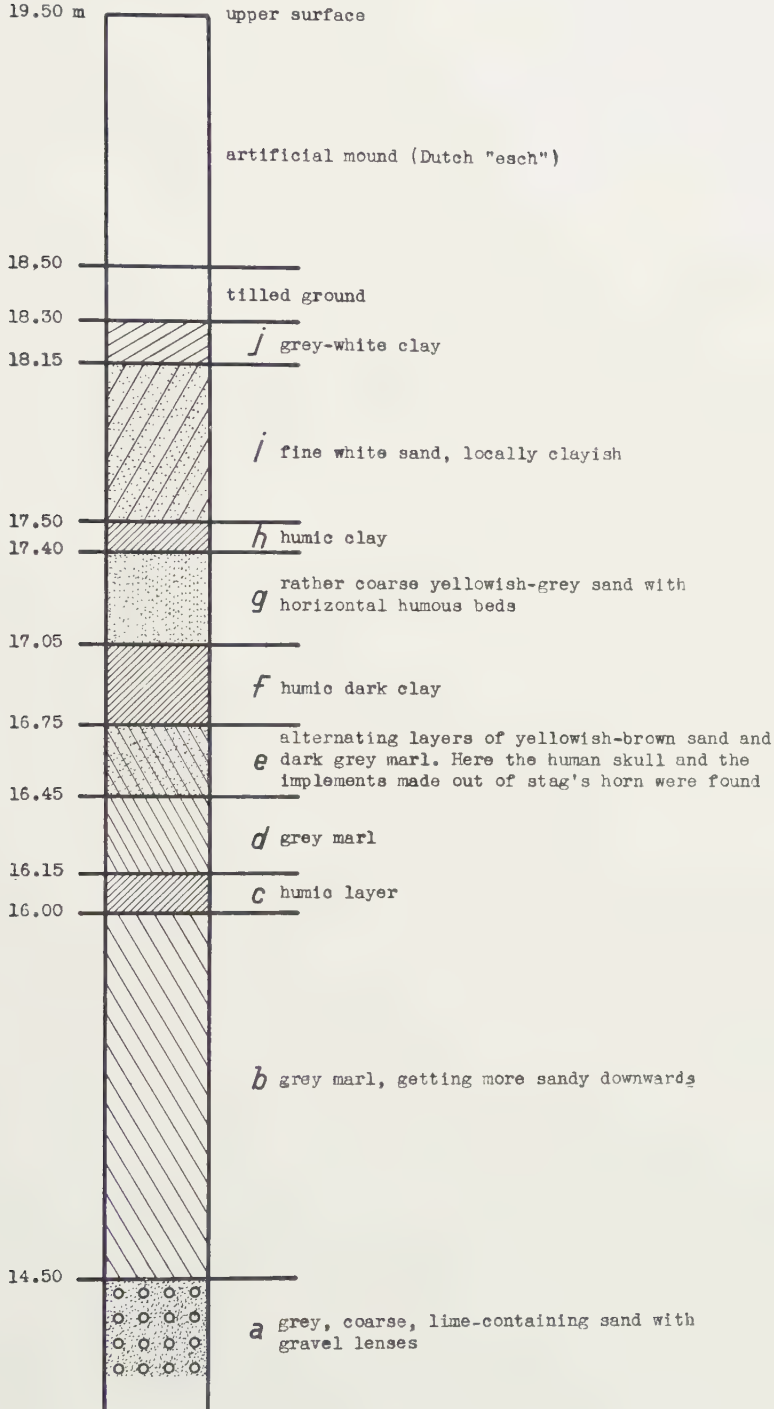


Fig. 1.

In the same sand in the sluice pit between 12 and 14.30 m also remains were found of a *Dryas* flora, as well as bones of *Elephas primigenius* Blum. and *Coelodonta antiquitatis* Blum. In contrast to the situation in the oil harbour, however, this sand does not form the bottom of the pit. The excavation has here gone deeper, so that at depths of 8.60 m—10.55 m and 11.35 m—11.75 m a couple of peat beds were exposed⁴⁾. These peat beds proved to have been formed under more temperate climatic conditions than the superimposed *Dryas* deposits.

Above horizon *a* — in the oil harbour higher than 14.50 m —, in horizon *b* the sand gradually becomes finer and at last becomes a grey marl. Pollen analysis of this marl yielded a diagram showing a high percentage of *Pinus* and *Betula*, a lower one of *Salix* and *Picea*, and a very high one of *Cyperaceae* (200—1000 %). This indicates that during the formation of this bed the vegetation in the neighbourhood was of a temperate arctic character⁵⁾.

A humic horizon *c*, situated between 16.00 m and 16.15 m, separates this grey marl from the following.

The second marl (horizon *d*) extends from 16.15 m to 16.45 m. Both in this horizon and in those below, *c* and *b*, we could clearly observe *kryoturbate* disturbances⁶⁾.

Between 16.45 m and 16.75 m follows a series of alternating layers of yellowish-brown sands and dark grey marls (horizon *e*). It is in this horizon that the human skull was found which is described in the anthropological part of this article. In the same horizon the two implements made out of stag's horn occurred (nos. St. 19136 and St. 19241) which are treated in the archaeological part. Besides these pieces, two fragments of the antlers of *Cervus elaphus* L. were found, a fragment of the lower jaw of ? *Bos*, the posterior part of the right part of the underjaw of *Bos* cf. *taurus* L., a left metatarsus (distinctly cleaved) of *Bos* cf. *taurus* L., and two metatarsi of *Equus caballus* L.

Above horizon *e* lies a dark humic clay (horizon *f*) between 16.75 m and 17.05 m.

The pollen diagram of horizons *c*—*f* is entirely different to that of *b*. The percentage of pollen grains of *Cyperaceae* grows gradually smaller towards the horizon *e*, where it falls to 20 and later rises again to about 250. Apparently at the time of the deposit of these beds the neighbourhood was comparatively rich in forest. In this diagram *Pinus*, *Betula* and *Picea* predominate but *Abies*, *Alnus*, *Carpinus* and *Corylus* also occur. Thus it may be presumed that, whereas the forestless vegetation during the for-

⁴⁾ FLORSCHÜTZ, l.c. p. 299.

⁵⁾ F. FIRBAS. — Die Vegetationsentwicklung des mitteleuropäischen Spätglazials. — *Bibliotheca botanica*. H. 112, 1935.

⁶⁾ For the expression "*kryoturbate*" see an article shortly to be published by EDELMAN, FLORSCHÜTZ and JESWIET. See also "*Geologie en Mijnbouw*" Sept. 1-'35, 14de jaarg., N^o. 6. The word "*kryomikt*" used there is synonymous with *kryoturbate*.

mation of horizon *b* was of a temperate arctic nature, during the deposit of *c-f* there were forests, the composition of which points to a temperate continental climate.

Horizon *g*, extending from 17.05 m to 17.40 m, consists of a rather coarse, yellowish-grey sand with a few intercalations of humic layers. In contrast to horizon *f* and *e* lying immediately below, here the krypturbate disturbances are again conspicuous.

A thin humic clay layer (horizon *h*) separates this sand from a fine, grained, white sand, (horizon *i*, 17.50 m—18.15 m), which is locally clayish. Here were found a left radius, a right radius and ulna, and a fragment of a metacarpus of *Equus caballus* L., as well as the right half of a pelvis of *Bos*, cf. *taurus* L. On the first mentioned radius of a horse four distinct parallel notches are to be seen.

Horizon *i* obviously terminates the pleistocene deposits, for above it lies a greyish-white clay (horizon *j* 18.15 m—18.30 m), which is regarded by the Government Geological Service as the base of the Holocene⁷⁾. This clay, with strong krypturbate disturbances, was also found in the sluice pit between 19.00 m and 19.30 m as well as in the foundation pit for a viaduct slightly to the north between 18.40 m and 18.90 m. The results of the botanical examination of a peat bed, 3 dm in thickness, found below the greyish-white clay in the viaduct pit, confirm the opinion of Dr. TESCH. On account of the presence of pollen grains of *Betula*, *Pinus* and *Salix*, leaves of *Betula nana*, macro- and microspores of *Selaginella selaginoides* and high pollen percentages (diminishing from below upwards from some thousands to a few hundreds) of *Cyperaceae*, *Gramineae* and *Ericaceae*, this peat bed must have been formed in the first forestless period of the Late Glacial time⁸⁾. In the uppermost cm of the peat a few pollen grains were found of *Alnus* and *Corylus*, an indication of the approach of the post-glacial warmth period.

As we mentioned above, the *Cyperaceae* pollen in horizon *f* gradually increases in percentage. In horizons *g* to *i* this progress becomes stronger to culminate in horizon *i* in more than 700 %. From this we may deduce that we have again had a forestless period with a temperate arctic climate, for the tree pollen found was confined to that of *Betula*, *Salix*, *Pinus*, and *Picea*. Perhaps the beginning of this stage was characterized by a tundra vegetation, as in the upper part of horizon *g* a lense of plant remains was found in which leaves of *Salix herbacea*, *S. reticulata* and *Betula nana* with macrospores of *Selaginella selaginoides* were specially conspicuous.

In the recently published "Erläuterungen zur Geologisch-morphologischen Uebersichtskarte des norddeutschen Vereisungsgebietes"⁹⁾ P. WOLDSTEDT has given a scheme of the subdivision of the Pleistocene in North

⁷⁾ Verbal communication from the Director, Dr. P. TESCH, with whom we made a visit to the exposures in 1934.

⁸⁾ FIRBAS, l.c.

⁹⁾ Ausgabe preuss. Geol. Landesanstalt, Berlin, 1935.

Germany, based upon a study of the moraines. Besides H. GAMS¹⁰⁾ has made a subdivision of the Pleistocene by means of the microstratigraphical and palaeontological data. Taking these two publications and the publication by Firbas referred to in note 5 into consideration, the following schedule may be made for the Late Pleistocene of N.W. Europe:

(Holocene)

Würm Glacial Stage	{	Late Glacial time
		Pomeranian Stadium = Würm III = Weichsel III
		Masurian Interstadium
		Frankfurt Stadium = Poznanian Stadium = Würm II = Weichsel II
		Twenthan Interstadium = Aurignacian Interstadium
		Brandenburg Stadium = Würm I = Weichsel I

Riss-Würm Interglacial Stage = Eemian Interglacial Stage = E-Interglacial (GAMS)
(Riss Glacial Stage)

As we prefer to avoid human culture names in stratigraphical subdivisions, we will speak of Twenthan Interstadium rather than of Aurignacian Interstadium.

If we fit the composed section of Hengelo into the above schedule, we arrive at the following result:

Holocene		horizon j.
Würm Glacial Stage	{	Late Glacial time
		peat between 18.10 m and 18.40 m in the viaduct foundation pit. Temperate arctic flora.
		Pomeranian Stadium
		horizon <i>g-i</i> . Tundra- and temperate arctic flora. <i>Bos cf. taurus</i> L., <i>Equus caballus</i> L.
		Masurian Interstadium
		horizons <i>c-f</i> . Temperate continental forests. <i>Homo recens fossilis</i> . Implements made out of stag's horn. <i>Cervus elaphus</i> L., <i>Bos cf. taurus</i> L., <i>Equus caballus</i> L.
		Frankfurt Stadium
		horizon <i>a-b</i> . Tundra- and temperate arctic flora. <i>Elephas primigenius</i> BLUM.
		Twenthan Interstadium
		8.60 m—11.75 m in the sluice pit. Temperate continental forests.
		Brandenburg Stadium
		not found in Twenthe as yet.
Riss-Würm Interglacial Stage		" " " " "
Riss Glacial Stage		8 m below the base of the sluice pit (\pm N.A.P.). Northern erratica.

The object of our research was principally to estimate the geological age of the skull. We consider that with the data at our disposal we are justified in concluding that the "Hengelo man" lived in the second interstadium of the latest ice period, when in the East of the Netherlands a temperate continental climate prevailed.

Velp (G.), November 1935.
Leyden

¹⁰⁾ H. GAMS. — Beiträge zur Mikrostratigraphie und Paläontologie des Pliozäns und Pleistozäns von Mittel- und Osteuropa und Westsibirien. — *Ecl. Geol. Helv.*, vol. 28, N^o. 1, 1935, p. 1, seqq.

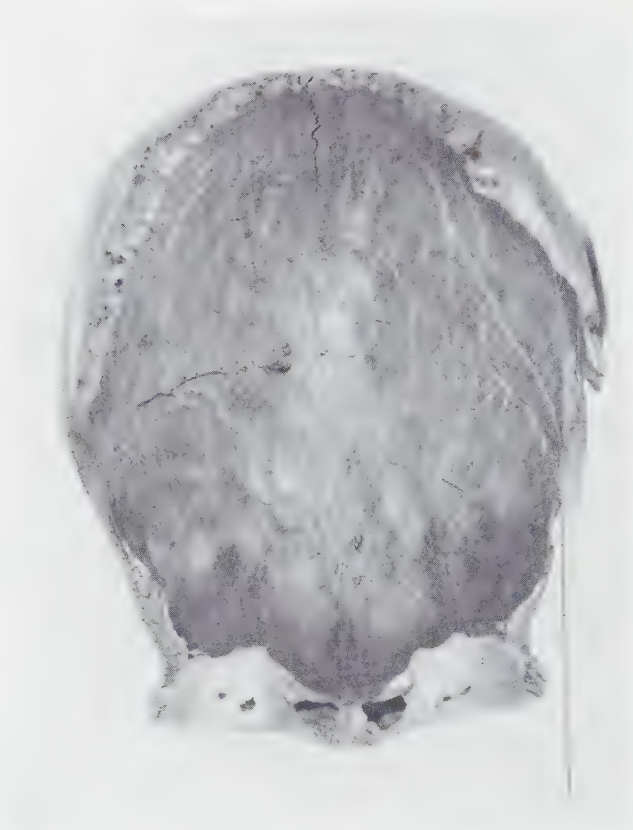


Fig. 4



Fig. 5

A. J. P. v. D. BROEK: THE PLEISTOCENE HUMAN SKULL FROM HENGELLO.
II. ANTHROPOLOGICAL PART.

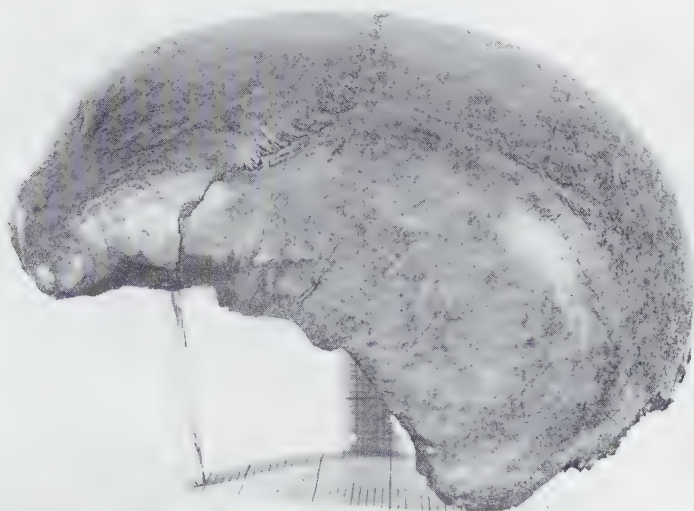


Fig. 2



Fig. 3

Anthropology. — *The pleistocene human skull from Hengelo. II. Anthropological part.* By A. J. P. VAN DEN BROEK. (Communicated by Prof. J. BOEKE).

(Communicated at the meeting of November 30, 1935).

The remainder of the skull consists of the frontal bone and the two parietal bones. These parts must a long time ago have been separated from the other parts of the skull, as the margins show no signs of recent fractures whatever.

The skull is of a dark greyish-brown colour, in connection with the layer in which it was found. The weight amounts to 337 gram. The skull obviously belonged to a middle-aged man, the right coronal suture and the sagittal suture showing a slight beginning of obliteration, which is more advanced on the inner surface than on the outer.

The impressiones digitatae and the sulci arteriosi on the inner surface are very accentuated. On both sides of the superior sagittal groove several impressions of granulations of Pacchioni are distinctly to be seen.

The skull belonged to *Homo recens*; no characteristics whatever of Neanderthal-man could be observed. This is in accordance with the age, as pointed out in the geological-palaeontological part of this communication.

Only a few measures can be given. The glabella-lambda length is 181 mm, the greatest width is 136 mm, so that the index cephalicus (s. cranicus) must have been less than 76.65, viz. the skull was dolichocephalic (-cranic). The frontal bone, especially the supra-orbital region, possesses some characteristics which may be considered as more or less primitive. The glabella is rather prominent, corresponding to the 5th or 6th type, reproduced in the textbook of MARTIN¹⁾. A margin between glabella and the forehead, — supraglabellare — can easily be recognized.

The glabello-cerebral index is 26.6, which is much lower than the same index of the Neanderthal-man (39—44.2) and is the same as in modern man.

The margo supraorbitalis — arcus supraciliaris and trigonum supraorbitale — are as in recent man; a torus supraorbitalis does not exist. The trigonum, s. planum supraorbitale, the lateral part of the regio supraorbitalis, is prominent. Its anterior border is not so massive as in the skulls of BRÜNN (III) and PŘEDMOST (IV), though it has the same direction and vaults above the orbita, as can be seen in the photographs

¹⁾ MARTIN, R. Lehrbuch der Anthropologie. Jena. G. FISCHER, 1928.

of the skull and in figure 6, in which I give a median section of the glabella and a sagittal section through the middle of the trigonum supra-orbitale. In this connection I wish to draw the attention to the foramen supraorbitale. On the left side I



Fig. 6.

find a supraorbital notch near the medial border of the orbita, and more laterad between the arcus supraorbitalis and the trigonum supraorbitale there is a foramen supraorbitale (canalis frontalis lateralis externus after LE DOUBLE²). On the right side there are two little openings on the place of the supra-orbital margin, as on the left side. On the external side of the mentioned opening begins a sulcus suprafrontalis (ZOJA).

It seems to me that the presence and the direction of the just mentioned opening is connected with the development of the trigonum supra-orbitale, but only an investigation of a greater material could confirm this supposition. In the literature on prehistoric skulls I never found mentioned a foramen supraorbitale; I could not detect this opening in the casts of prehistoric skulls which were at my disposition.

The interorbital width amounts to 19 mm; the distance between the two frontomalaria is 104 mm. The sinus frontalis is small, on the right side larger than on the left side; the sinus frontalis is mainly limited to the glabella.

The distance between the two frontotemporalia (kleinste Stirnbreite) is 93 mm., the fronto-parietal index is 68.38.

The length of the parietal bone, measured along the sagittal suture, amounts to 125 mm, the length of the tendon to 109 mm. The length of the margo lambdoideus is 120 mm, the length of the tendon 91 mm. The length of the coronal suture amounts to 128 mm. The angle between the coronal suture and sagittal suture is 95°, the angle between right and left coronal suture is 170°.

The linea temporalis remains at a distance of 62 mm from the sagittal suture. The smallest distance between the two lineae temporales superiores is found near the margo lambdoideus and amounts there to 85 mm. Where the linea temporalis superior crosses the coronal suture, a sharp incurvation is to be seen in connection with the form of this suture.

Utrecht, November 1935.

²) LE DOUBLE. *Traité des variations des os du crâne*. Paris. Vigot frères, 1903.

Archaeology.—*The pleistocene human skull from Hengelo. III. Archaeological part.* By F. C. BURSCH. (Communicated by Prof. J. BOEKE).

(Communicated at the meeting of November 30, 1935).

For the archaeological estimation of the skull found in the oil harbour at Hengelo, two pieces of stag's horn found in the immediate vicinity are of the utmost importance. We will begin by a description of these:

1. Fragment of a branch of the antler of a stag (*Cervus elaphus*), 23 cm long, provisional catalogue no. St. 19241 (cf. fig. 7). The surface has been smoothed, but a few irregularities have remained. On this smooth surface there are a great number of parallel scratches, irregularly distributed and very superficial. These scratches are also found in a few deeper smooth hollows near the point and have been caused by the polishing of the surface with a flint.

The broader end is incised several times with a flint to cut off the branch from the rest of the antler and make an implement of it. At the broken surface the inner spongy tissue has crumbled away considerably, probably due to the rough method of breaking. The tip has been pointed by cutting it diagonally.

2. A fragment of the antler of a stag, about 11 cm long, provisional catalogue no. St. 19136 (cf. figs. 8, 8a and 8b). The surface of this piece is also fairly smooth, although the curves of the original horn are still traceable, as in the first. In places there are broad, shallow notches at right angles to the line of growth, as well as a few sharp and narrower oblique scratches. At the narrow end this piece is cut off straight as far as the inner tissue, which protrudes a few mm above the horizontal plane thus formed. The bone round about plainly shows the short cutting marks of the small flint instrument which was used for this operation.

The broader end displays just the same kind of marks, but made with less skill apparently, or else at a later time the bone has split down about 2 cm. The central tissue is here deeply hollowed out (as much as 33 mm) to a point, while at the narrow end only an irregular hollow of some 10 mm can be seen. The wall of the first hollow is notched in some places as if a sharp object had been stuck into it. At both ends the central tissue is also deeply notched here and there where it protrudes beyond the sawn bone.

There can be no doubt that the pieces of horn described above have been wrought by the hand of man. But although they are significant, we are well aware that they do not furnish abundant data for the conclusions we here advance as to the period in which the "Hengelo man" lived, his

country origin and even his position in the prehistoric system of Europe. Our conclusions, therefore, should be considered as of a rather hypothetical character.

Our premises are somewhat enlarged if we include the objects found in other places during the construction of the Twente-Rhine canal near Lochem and the sluice at Hengelo. These pieces of horn, the most important of which is a chisel, found at Lochem (figs. 9 and 9a), corroborate the conclusions which follow.

Civilizations, characterized by an extensive use of stag's horn for all kinds of purposes, are rare. All neolithic hatchets of flint or other stone, were originally inserted into handles but these were usually of wood and have only very seldom been found. The inhabitants of the Swiss lake villages, it is true, used horn for this purpose, but the form of these holders does not correspond to our pieces. In the later periods of the French palaeolithic era implements of bone are found as well as those of stone, but here they are only harpoons, spikes and the well-known "bâtons de commandement".

On the other hand in Northern Europe, round the Baltic, civilizations are found which produced chiefly bone implements, or at any rate made great use of bone and horn for holding and manipulating flint. The Maglemosean civilization in particular, which is best known from three localities in Denmark (Maglemose, Holmegaard and Svaerdborg), has yielded many forms which are identical with ours.

The type of our piece no. 1 is represented in Maglemose (once), in Holmegaard (20 times) and Svaerdborg (18) ¹⁾. Its use is not certain, but this much is evident that it was the sharpened point that was of importance. Sometimes the cut has gone so deep that the soft tissue has been laid bare and in the course of time this wore away into hollows, but never of sufficient depth for an implement of flint to be inserted. Objects of this kind have so far been confined to this civilization and in later periods especially they are not found any more.

The second object described above was probably used as a handle for a sharp stone or bone instrument, such as a chisel, which was inserted into the broad end that had been hollowed out for the purpose. Although most objects of this kind in Denmark are moreover bored for a handle, there are also unbored specimens both at Maglemose and Svaerdborg ²⁾.

The bored chisel or hammer from Lochem is also a typical and frequently found instrument of this civilization ³⁾.

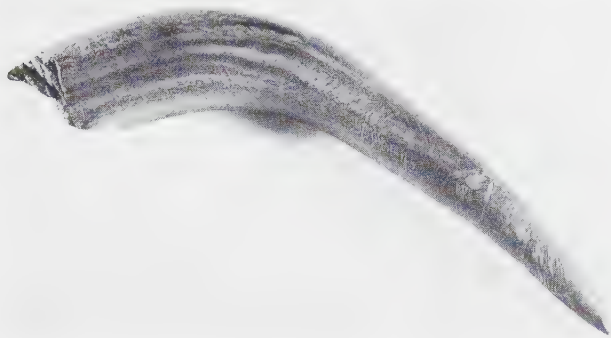
The Maglemosean civilization is further characterized by the shape of the stone implements. The large ones are hammers, bores, scrapers, and knives, while besides there are small scrapers and microlithic points. Other

¹⁾ Mémoires des Antiquaires du Nord, 1914—1919, p. 331 seqq. Idem, 1926—1927, p. 52.

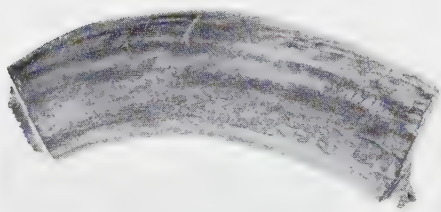
²⁾ EBERT, Reallexikon der Vorgeschichte, Bnd. IX, Taf. 8: *u* and *v*.

³⁾ EBERT, Reall. IX, Taf. 5: *a* and *b*.

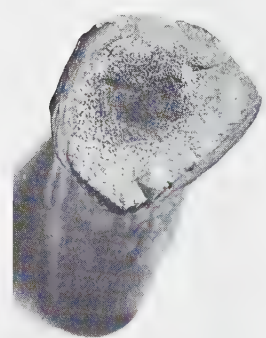
F. C. BURSCH: THE PLEISTOCENE HUMAN SKULL FROM HENGELÖ.
III. ARCHAEOLOGICAL PART.



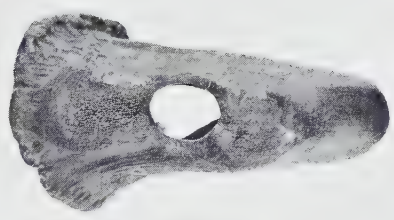
7



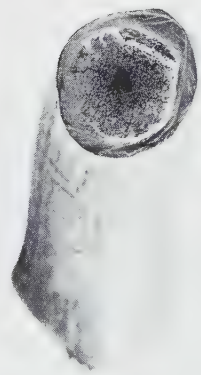
8



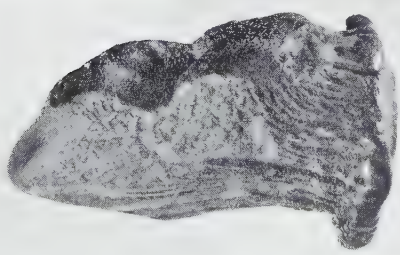
8a



9



8b



9a

forms of implements of bone are awls, harpoons and curved fish hooks.

All the localities named are extensive territories lying beside great lakes or upon high ridges in the lakes. In the course of time these lakes have become peat-bogs and the culture layers were found when digging out peat. They contain no traces of dwellings but fires have been found.

A pollen analysis of the peat led to the dating of these localities in the Ancyclus period, a result confirmed by the fauna found in it⁴).

The Maglemosean civilization belonged to a people of hunters, who settled in summer by the waters of large lakes or on swampy islands and lived on the flesh of deer, moose and aurochs, and small game. The traces of vegetable food consist of hazel-nuts and seeds of the yellow water-lily (*Nuphar luteum* Sm.).

According to the reigning opinion the centre and startingpoint of this civilization lies in Denmark. From there it spread to Sweden, the Baltic countries and England (the North Sea and Northumberland). It survived, probably strengthened by new groups of population, in the Kökkenmødding civilization in Scandinavia and, in so doing, formed part of the stock of the Scandinavian population in later times.

There is less certainty about its origin. On the ground of affinities found in the lithic inventory of the Danish localities with those in Magdalenian and Azilian culture in France, an origin was assumed in the South West, which is further supported by the identity of the harpoons in both cultures. The skulls belonging to these cultures found in France show the characteristics of the Cro-Magnon-type. The sparse relics (a few mandibulae) found in the Maglemosean dwelling places⁵) similarly display Cro-Magnon features. The difference of time and the geographical distance between the two cultures has so far been a hindrance to finding a satisfactory answer to the problem of their genetic connections⁶).

Moreover, there is an insuperable objection to this theory of origin from the archaeological point of view. In the western palaeolithic periods hammers and hatchets are quite unknown, neither have horn implements such as ours ever been found. On the other hand it becomes more and more evident that recent finds in Moravia, which belong to the Magdalenian civilization, may be of great importance in elucidating the origin of the Maglemosean culture. Here hatchets of reindeer and stag's horn are found, which, as far as I am aware, have only been reproduced in an illustrated weekly journal⁷).

⁴) Mém. d. A. d. N. 1926/27, p. 118 (BROHOLM). Compare also: KNUD JESSEN, The composition of the forests in Northern Europe in epipalaeolithic time. Biologiske Meddelelser XII, 1, of the Kgl. Danske Videnskabernes Selskab, København, 1935.

⁵) Mém. d. A. d. N. 1920—1924, pp. 33—48, (NIELSEN).

⁶) Cf. in this connection G. FRIIS JOHANSEN, Mém. 1914/19, p. 351, seqq. and H. C. BROHOLM, Mém. 1926/27, p. 120, seqq.

⁷) Ill. London News, 1929, p. 1036/9. Flint knife in handle like our N^o. 2 on p. 1039, fig. 53 (ABSOLON). Cf. Mitteilungen aus der pal. Abt. am mährischen Landesmuseum, Brünn, 1926 and following years.

The so-called "Lyngby" civilization, which has always been somewhat artificial⁸⁾ as it was constructed from sparse and widely severed objects, has met in late years with a good many opponents, who wish to eliminate it from the archaeological system⁹⁾, where it appeared earlier than the Maglemosean culture, in the Yoldia-stage. This is of importance to us, because the field of its distribution lies between Moravia and Denmark. If, therefore, it should be proved that these objects made of reindeer and stag's horn, which include a few hatchets, from Posen, Silesia, Brandenburg, and Schleswig-Holstein, are not to be regarded as symptoms of a separate culture but as links between the finds in Moravia, belonging to the Würm Glacial Stage, and the Maglemosean culture of the Ancylylus age, they would form an important connection between these two analogous cultures. All the more so because there are supposed to be many anthropological similarities. The skull from PŘEDMOST, namely, seems to be more justly comparable to the similar finds in Denmark than those found in Western Europe¹⁰⁾.

It can be seen from the above that the finds in Hengelo may prove to be of the utmost importance for prehistoric research in Europe. Archaeologically, as we have seen, in so far as it is possible to draw conclusions of any kind from so small an amount of material, there is a great affinity between Twenthe and the Maglemosean culture in Denmark. While the latter, however, belongs to the Ancylylus age only, the research by FLORSCHÜTZ and VAN DER VLIERK has shown that the finds in Twenthe should be dated in the Masurian interstadium of the Würm Glacial Stage. Archaeologically, therefore, they would belong to a pre-Maglemosean culture. The foregoing has shown that our welldated finds will play an important part in tracing the origin of the Maglemosean civilization, which appeared in Denmark after the retreat of the ice, as they form as it were a "missing link" between the finds in Moravia and those in Denmark.

Considering the importance of the discovery it is very much to be regretted that the material so far revealed is so sparse. There is no doubt that the ground here must have contained much more material than what has been discovered, probably many flint implements and perhaps micro-liths. Our conclusions would gain great support if further similar objects could be revealed on this spot. They would also provide an answer to many other problems which arise, for instance, the relation of this culture to other early civilizations of which traces have already been found in Holland: in Elspeet, Drunen and on the Kuinder. Even now, on the

⁸⁾ G. SCHWANTES, das Beil als Scheide zwischen Pal. und Neol. in *Archiv f. Anthr.* N. F. Bnd. 20, p. 13, seqq. Cf. also G. EKHOLM, EBERT Reall. Bnd. IX, p. 7, seqq. and the literature there quoted.

⁹⁾ e.g. O. MENGHIN, *Weltgesch. der Steinzeit*, Wien 1931, p. 171.

¹⁰⁾ Concerning PŘEDMOST cf. Reche in EBERT, Reall. Bnd. X, p. 245. Further, regarding the similarity: EKHOLM, W. P. Z. 1925, p. 1, seqq. and 1926, p. 20, seqq.

strength of previously found objects, preserved in the Archaeological Museum in Leyden, it is safe to assert that similar objects were spread over the whole of the country, although as regards these finds it is not always possible to say with certainty for each piece whether it belonged to the Maglemosean or to the nearly related Kølkenmøddinger culture, as geological data in most cases are absent. Localities where similar objects are found are the estate of Veenenburg near Hillegom, Krimpen aan den IJssel, Nijmegen, Venlo, and Olst. It is possible that a search through the museums of the country and the ground itself may yield more evidence.

In conclusion, we count as greatly to the benefit of research the growing conviction that a generous cooperation between the various branches of science is the best way to promote the knowledge of prehistoric conditions and to gain an insight into the history of our country during the period of which there are no records except those yielded by the ground itself.

Leyden, November 1935.

Botany. — *Über die Nikotinbildung bei Nicotiana nach der Fütterung mit Prolin.* Von A. GORTER. (Communicated by Prof. J. C. SCHOUTE.)

(Communicated at the meeting of December 21, 1935).

In den letzten Jahren sind einige Publikationen von KLEIN und LINER (4, 5, 6) erschienen über die Vermehrung des Alkaloidgehaltes verschiedener Pflanzen nach der Fütterung mit bestimmten Aminosäuren. Gegen die dabei angewandte Methode sind aber meiner Meinung nach in physiologischer Hinsicht einige Einwände zu erheben.

Wenn wir uns vorläufig nur auf die Untersuchungen über die Fütterung von Nicotianapflanzen beschränken, dann sehen wir, dass die gefütterten Pflanzen stets mit Kontrollpflanzen verglichen wurden, die auf dieselbe Weise behandelt wurden wie die Versuchspflanzen, aber mit Wasser ohne Aminosäuren. Wenn man nun in den Versuchspflanzen Vermehrung des Nikotingehaltes beobachtet, so hat dies nur dann Wert, wenn man sicher weiss, dass der Nikotingehalt in der Wasserkontrolle nicht gegenüber dem Versuchsbeginn gesunken ist; denn in diesem Falle würde die scheinbare Zunahme des Nikotingehaltes in Wirklichkeit eine verminderte Abnahme sein können.

Dass dies keine eingebildete Gefahr ist, zeigt sich aus den Versuchen von KLEIN und LINER (5) selbst bei Dahlia, wo z.B. aus der Tabelle 4 und 5 folgt, dass Prolin-Fütterung nur Vermehrung des Trigonellin-

gehaltenes ergibt, wenn man mit der Wasserkontrolle vergleicht, nicht aber absolut. Die Verfasser haben den Verlauf des Trigonellingehaltes einige Monate lang beobachtet und nehmen nun an, dass die Versuche gerade in eine Zeit der Trigonellinverminderung fielen. Das ist möglich, aber die Versuche verlieren dann wohl viel von ihrer Beweiskraft. Das gleiche werde ich mit eigenen Versuchen bei *Nicotiana* zeigen.

Auch der Schlussfolgerung von KLEIN und LINSE, dass das Trockengewicht die einzige richtige Vergleichsbasis sei, kann ich nicht in jeder Hinsicht zustimmen. Es ist richtig, dass diese Methode in diesem Fall besser ist, als der Vergleich des Frischgewichtes, aber grundsätzlich gelten dieselben Einwände. Auch das Trockengewicht kann sich nämlich während des Versuches verändern durch Assimilation, Atmung und Transport (letzteres kommt natürlich bei Verarbeitung von ganzen Pflanzen nicht in Betracht). Bei Blättern ist es besser, deren Oberfläche zu vergleichen, die sich während der verhältnismässig kurzen Zeit der Versuche bei voll ausgewachsenen Blättern sicher nicht ändert. Diese Verhältnisse wurden in diesem Laboratorium sorgfältig untersucht und von GOUWENTAK (2) besprochen.

Ich komme nun zu den von mir selbst mit *Nicotiana* angestellten Versuchen.

Der Nikotingehalt wurde nach der Methode von PFYL und SCHMIDT bestimmt, die von VAN DRUTEN (1) etwas verändert ist. Diese Methode hat nach PFYL und SCHMIDT noch einige Vorteile vor der Kieselwolframsäure-Methode, die von KLEIN und LINSE angewandt wird. Diese Methode von P. u. S., die von mir noch ein wenig geändert wurde, wurde auch auf Grund einer kritischen Untersuchung von KOENIG und DÖRR (3) als die beste bezeichnet.

Das Pflanzenmaterial wurde so schnell wie möglich bei 100—105° getrocknet. Das ist besser als eine Temperatur von 80°, weil dabei durch Enzymwirkung noch Veränderungen im Nikotingehalt stattfinden können, wie KLEIN (7) und SUCHSLAND (8) bei der Tabakverarbeitung in der Praxis zeigen konnten. Bei 100—105° findet diese Enzymwirkung nicht statt, und es geht, wie ich vorher zeigen konnte, dabei doch kein Nikotin verloren. Das trockene Material wurde sehr fein pulverisiert und quantitativ durch ein Sieb mit 30 Maschen per cm gesiebt und danach wieder getrocknet. Von diesem Pulver wurden ungefähr 3 g abgewogen und nach gutem Mengen mit 30 ccm Wasser, 25 g NaCl und 10 ccm 20 %-iger KOH einer Dampfdestillation unterworfen, wobei in ungefähr 25 Minuten 125 ccm abdestilliert wurden. Das Destillat wurde dann neutralisiert mit verdünnter HCl auf Methylrot. Dieses wurde dann mit einigen Tropfen Bromwasser entfernt; danach wurden 75 ccm gesättigte Pikrinsäurelösung zugesetzt. Die Lösung wurde nun 12 Stunden in den Eiskasten gestellt; der Niederschlag wurde dann auf einem Jena-Glasfilter abfiltriert, mit eiskalter verdünnter Pikrinsäurelösung und mit Eiswasser

gewaschen und hierauf auf dem Filter getrocknet und gewogen. Jede Bestimmung wurde doppelt vorgenommen.

Die Nicotianapflanzen waren aus Samen gezogen, die vom Versuchsinstitut für Tabakforschung in Forchheim geliefert wurden. Sie wurden im Juli und August verarbeitet.

Die Kontrollpflanzen wurden nach dem Abschneiden in eine zweimal verdünnte Nährlösung nach KNOP gestellt. Die Versuchspflanzen wurden in eine ebensolche Lösung mit Zusatz von 0.5 % Prolin gebracht. Die Pflanzen standen stets 4—5 Tage lang an einem hellen Platz, aber nicht im direkten Sonnenlicht. Es wurden nur die Blätter verarbeitet, weil sich in Vorversuchen gezeigt hatte, dass der Stengel sehr wenig Nikotin enthält.

Zuerst wurde untersucht, ob die Pflanzen untereinander wohl den gleichen Nikotingehalt hatten; dazu wurden 5 Pflanzen gesondert verarbeitet und das Nikotin auf die Blattoberfläche berechnet.

Es wurde gefunden:

Pflanze Nr.	mg Nik. per dm ²
106	0.830
107	1.044
108	0.801
109	0.779
110	0.699
durchschn. 0.83 ± 0.115	

Daraus folgt, dass man sich nicht auf das Ergebnis bei einer einzigen Pflanze verlassen darf und dass Veränderungen im Nikotingehalt nur dann Sinn haben, wenn sie ausserhalb des durchschnittlichen Fehlers fallen.

Bei der ersten Serie wurden nun 3 Pflanzen direkt verarbeitet, 3 andere Pflanzen, nachdem sie 4 Tage lang in der Kontroll-Lösung gestanden hatten und 3 Pflanzen die während derselben Zeit in derselben Lösung mit Zusatz von 0.5 % Prolin gestanden hatten.

Das Ergebnis der ersten Versuchsreihe war:

Pflanzen	mg Nik. per dm ²
direkt verarbeitet	0.852
in Kontroll-Lösung	0.573
in Lösung mit Prolin	0.617

Es zeigt sich bei diesen Versuchen daher, dass die Fütterung mit Prolin wohl eine scheinbare Vergrösserung des Nikotingehaltes ergibt, die aber in Wirklichkeit eine kleinere Abnahme ist.

Bei einer zweiten Reihe wurde eine andere Tabakrasse mit höherem Nikotingehalt verwendet. Auch dabei wurden die Pflanzen zuerst untereinander verglichen.

Es wurde gefunden :

Pflanze Nr.	mg. Nik. per dm ²
126	1.13
127	1.73
129	1.35
130	1.41
durchschn. 1.41 \pm 0.21	

Bei dieser zweiten Serie wurden auch wieder 9 Pflanzen in der oben beschriebenen Weise verarbeitet. Das Ergebnis war :

Pflanzen	mg Nik. per dm ²
direkt verarbeitet	2.43
in Kontroll-Lösung	1.36
in Lösung mit Prolin	1.79

Auch hier daher dasselbe Ergebnis wie in der ersten Serie, wobei sich ausserdem zeigt, dass sich der Nikotingehalt in kurzer Zeit schnell ändern kann, da die „direkt verarbeiteten“ Pflanzen nur 10 Tage nach den Pflanzen 126—130 analysiert wurden. Vielleicht kann dies dadurch erklärt werden, dass die Pflanzen in dieser Zeit zum Blühen kamen.

Zusammenfassung.

Es werden einige Einwände vorgebracht gegen die Methode die von KLEIN und LINSER benützt wurde, um die Zunahme des Nikotingehaltes von Nicotianapflanzen nach Fütterung mit Prolin zu zeigen. Es werden auch einige Versuche mitgeteilt, aus denen sich ergibt, dass in den untersuchten Fällen bei Nicotiana die Zunahme des Nikotingehaltes nach der Fütterung nur scheinbar ist und in Wirklichkeit eine verringerte Abnahme vorliegt.

Schliesslich möchte ich Herrn Prof. Dr. TH. WEEVERS dafür danken, dass er mir die Gelegenheit bot, in seinem Laboratorium diese Versuche auszuführen und Herrn Prof. Dr. G. KLEIN, Direktor des botanischen Laboratoriums der I. G. Farbenindustrie in Ludwigshafen für die Freundlichkeit, mir Prolin zu senden.

LITERATUR.

1. DRUTEN, A. v. : Z. Unters. Lebensm. **60**, 501 (1930).
2. GOUWENTAK, C. : Rec. trav. bot. néerl. **26**, 19 (1929).
3. KOENIG, P. und DÖRR, W. : Z. Unters. Lebensm. **67**, 113 (1934).
4. KLEIN, G. und LINSER, H. : Z. physiol. Chem. **209**, 75 (1932).
5. Dies. : Planta **19**, 366 (1933).
6. Dies. : Planta **20**, 470 (1933).
7. Vgl. LAFAR : Handb. d. techn. Myk. 2. Aufl. **5**, 6 (1914).
8. Ebenda **5**, 7 (1914).

*Amsterdam, Pflanzenphysiologisches Laboratorium
der Universität.*

Botany. — *The influence of hetero-auxin on the growth of root hairs and roots of Agrostemma Githago L.* By A. MEESTERS.
(Communicated by Prof. J. C. SCHOUTE.)

(Communicated at the meeting of November 30, 1935).

Whereas the three growth substances auxin *a* and *b* and hetero-auxin promote the elongation of coleoptiles, stems and other above-ground parts of plants, they appear to inhibit the growth of roots.

Thus CHOLODNY (1924) showed that coleoptile tips, in which the growth substance is produced, inhibit the growth of decapitated roots to which they have been applied.

KÖGL, HAAGEN-SMIT and ERXLEBEN (1934) determined that the β -indolyl-acetic acid (hetero-auxin) inhibits the growth of roots, just as auxin *a* and *b*, when they cultivated oat seedlings in water to which the growth substance in the concentration of 0.01 to 1 mg per litre had been added.

The inhibiting effect of rhizopin on the growth of roots (NIELSEN, 1930) must be attributed to the hetero-auxin, as THIMANN (1935) and KOSTERMANS (1935) determined the identity of the active element of rhizopin with the β -indolyl-acetic acid.

The purpose of my investigations was to determine the influence of hetero-auxin¹) on the growth of unicellular root hairs and, in connection with this, to study the retardation of growth of roots, caused by the growth substance.

Further the chemotropism of root hairs was examined.

I. *Microscopical measurements of the growth of root hairs.*

The growth of root hairs in single-salt solutions with different p_H' was studied by FARR. He inserted young seedlings of *Brassica oleracea* var. into a small solution chamber; they grew with their radicles thus immersed in a flowing solution during the night, and after 15 hours he determined the elongation of the root hairs with a microscope (1927*a*). The highest average growth of 88 microns per hour occurred in a 0.008 molar calcium chlorid solution.

The root hairs of the object used in the subsequent experiments, *Agrostemma Githago L.*, grew more rapidly: average 105 microns per

¹) I am greatly indebted to Prof. Dr. H. J. BACKER, Director of the Laboratory for Organic Chemistry at Groningen, for preparing the hetero-auxin.

hour in 0.005 molar calcium nitrate solution. Of more importance, however, is the regular growth of a single root hair of this plant (text fig. 1). The large deviations found by FARR with *Brassica* at successive readings at ten-minute intervals, which forced him to observe the root-hair elongation during at least three hours, never occurred.

However, the rate of growth of root hairs of different plants in the same solution was sometimes found to vary up to 30 per cent. An attempt was therefore made to investigate the changes of growth (if any) caused by the addition of hetero-auxin on one hair.

Some difficulty was caused by the fact that the addition of the growth substance to distilled water involves a p_H fall of the solution, to which root hairs are very sensitive (cessation of the growth, together with plasmolysis in some cases). To obviate this change of acidity, a solution in which there was a good growth (0.005 molar calcium nitrate in distilled water) was buffered up to a concentration at which a tolerable growth remained.

Although the acidity of tap water does not change on the addition of a small quantity of hetero-auxin, this water did not prove suitable for the experiments, as the root hairs tended to grow in a waving line.

An experiment was performed as follows:

Two seedlings of *Agrostemma Githago* L. with radicles approximately six millimeters long, from seeds germinated on filter paper against the upper side of a damp chamber, were inserted into a small glass water chamber ($30 \times 20 \times 1$ mm) on the stage of a microscope at about 5 P.M. A 0.005 molar calcium nitrate solution in distilled water, to which was added 7 cc. buffer solution (1 part 0.1 molar acetic acid and 9 parts 0.1 molar sodium acetate) per litre, was siphoned into the water chamber from a litre Erlenmeyer flask, closed with a tube containing soda-lime, on a shelf above. Before the addition of the buffer solution, carbon dioxide-free air was blown through the calcium nitrate solution, saturated with air, for 5 minutes. The rate of flow of the solution was regulated by a stopcock, in such a way that the contents of the water chamber were refreshed after 1 or 2 minutes. The following morning measurements at ten-minute intervals were made of a root hair entirely formed after immersion, with a Zeiss eyepiece screw micrometer. After some time a quantity of hetero-auxin, dissolved in the solution employed¹), was added to a definite concentration. By means of a bubble, brought before the solution with the hetero-auxin, the moment at which this solution reached the hair could be determined. The experiments were made in a dark room of constant temperature, lighted by means of a 50 candle-power lamp.

The result of such an experiment is graphically illustrated in text fig. 1.

After the addition of the hetero-auxin up to a concentration of $1\frac{2}{3}$ mg per litre a strong retardation of growth occurs, caused by the formation of a thickening at the top of the hair. After nearly 20 minutes the hair continues to grow with normal diameter, with a retardation of 18 per cent.

Under the influence of the growth substance the p_H value of the

¹) The hetero-auxin was purposely added to the original solution, as it was found that small differences in the carbon-dioxide tension of the distilled water themselves caused changes in the rate of growth.

solution was found to fall from 5.3 to 5.2 (colorimetrically determined by means of the wedge-method), notwithstanding the buffering. This change of acidity probably gave rise to the thickening of the hair at the top.

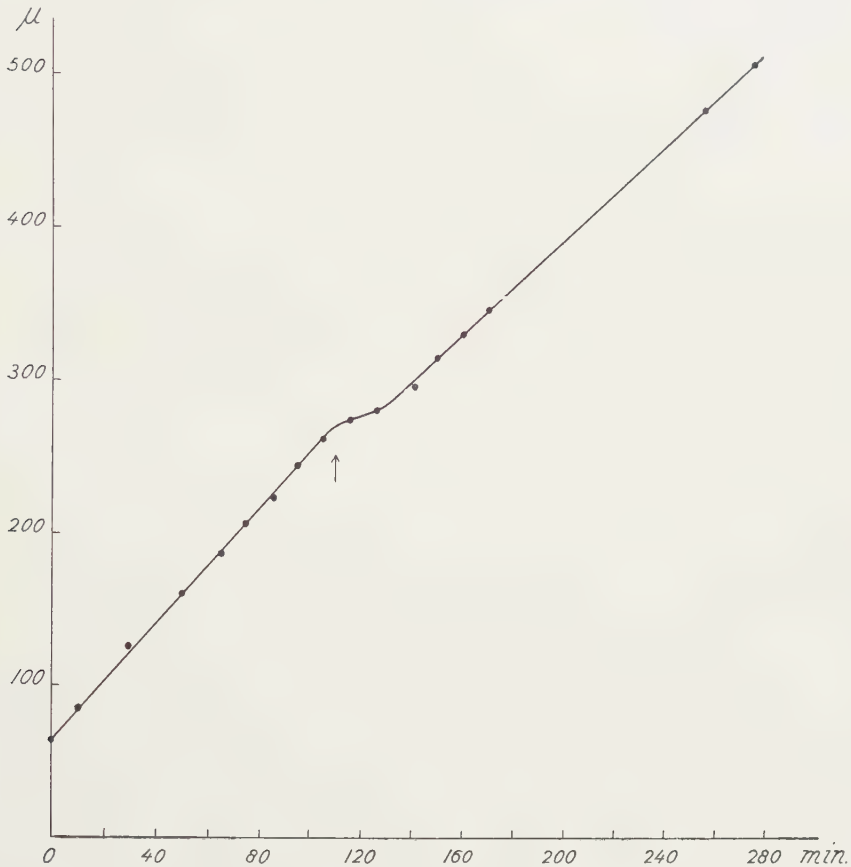


Fig. 1. Root-hair elongation in a slightly buffered calcium nitrate solution without and with hetero-auxin. The growth substance at a concentration of $1\frac{2}{3}$ mg per litre reached the hair at the arrow. Ordinates are length of the root hair; abscissae are time.

In other experiments, performed with hetero-auxin concentrations from 1 to 4 mg per litre, there was no change worth mentioning in the rate of elongation of the root hairs or a gradual decrease.

These divergent results led to another method of investigation.

II. Macroscopical measurements of the growth of root hairs and roots.

a. Root hairs.

The lengths of root hairs formed in solutions with different concentrations of hetero-auxin were measured macroscopically and compared with each other.

Seeds of *Agrostemma Githago* L. were germinated in damp chambers. Just before the formation of root hairs, young roots (about 2 mm) were brought into 0.005 molar calcium nitrate solutions in tumblers of 50 cc., containing an increasing quantity of hetero-auxin ($\frac{1}{2}$ to 16 mg per litre), by means of holes in a floating piece of paraffin. In every tumbler there were four roots; the length of the root hairs was measured after 1 and 2 days.

The average values of two experiments are represented in text fig. 2; the left-hand curves show the growth of root hairs with an increasing quantity of hetero-auxin and thus point to a retardation.

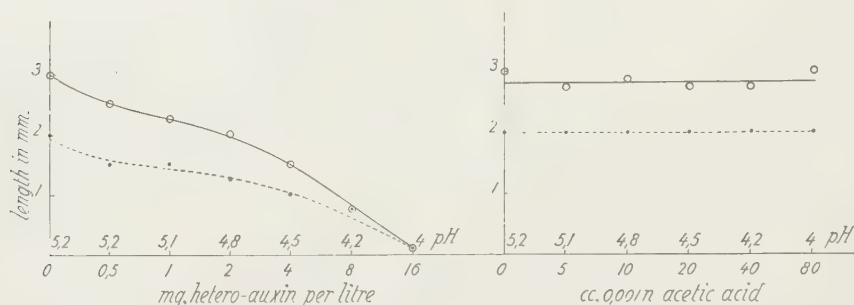


Fig. 2. Graphs showing the influence of increasing quantities of hetero-auxin (left) and acetic acid (right) on the growth of root hairs after 19 hours (broken lines) and 43 hours (continuous lines) in 0.005 molar calcium nitrate solution.

Under the influence of the hetero-auxin, the p_H value of the solution fell from 5.2 to 4. It was quite possible that this change of acidity would cause a retardation of growth already in itself, since FARR (1927 *b*) showed that, in a p_H range from 6.9 to 11.9, the process of growth of root hairs of *Brassica oleracea* could be represented in a bimodal curve; STRUGGER (1926, 1928) found that, in another p_H range, the protoplasmatic changes of the root hairs of *Hordeum vulgare* could be represented in a similar curve, and he later (1932) showed the relation of cause and effect between these changes and cell extension.

In order to determine whether this change of acidity plays a rôle, an increasing quantity of acetic acid was added to the calcium nitrate solution, causing the same p_H fall as the hetero-auxin. In this case the growth of the root hairs, however, was found to be normal (text fig. 2, to the right), so that the retardation of growth must be attributed to the specific influence of the β -indolyl-acetic acid.

b. Roots.

An evident inhibition of the root-hair elongation occurred only at a concentration of $\frac{1}{2}$ mg hetero-auxin per litre. The growth of the roots of *Agrostemma Githago* L., on the other hand, was inhibited maximally at this concentration; the first evident retardation of growth occurred

at a concentration of 0.00049 mg hetero-auxin per litre (text fig. 3, to the left).¹⁾

A small quantity of acetic acid had no effect upon growth again (text fig. 3, to the right).

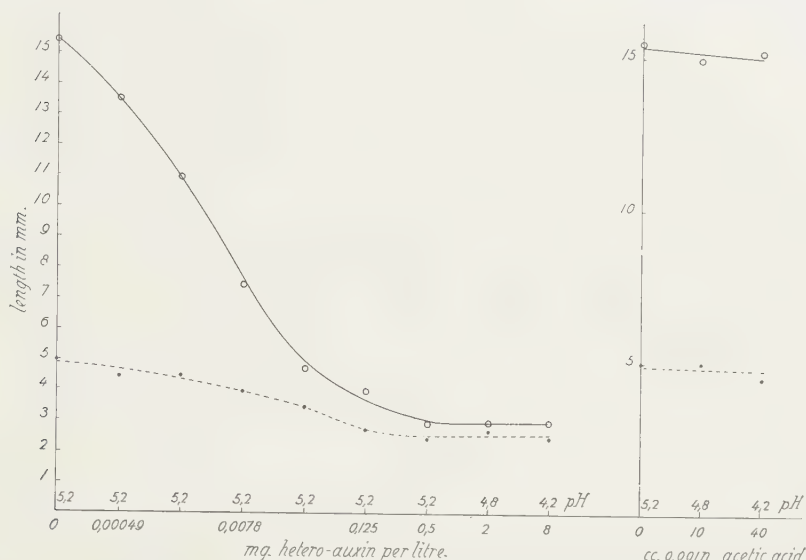


Fig. 3. Graphs showing the influence of increasing quantities of hetero-auxin (left) and acetic acid (right) on the growth of roots after 19 hours (broken lines) and 43 hours (continuous lines) in 0.005 molar calcium nitrate solution.

The experiments were repeated in tap water; the inhibition of growth of the root hairs showed almost the same course, only the hairs tolerated a higher concentration of hetero-auxin (a growth even at 32 mg per litre). A maximal retardation of growth of the roots at a concentration of $\frac{1}{2}$ mg hetero-auxin per litre occurred here also.

III. Chemotropism of root hairs.

The chemotropism was examined by means of the method of SEIDEL (1924): the ends of capillaries containing solutions of hetero-auxin of various concentrations were fixed at a small distance from the top of root hairs of *Agrostemma Githago* L., cultivated in solutions.

The hetero-auxin proved to be unable to produce chemotropic curvatures.

CZAJA (1935) too, investigated the influence of hetero-auxin on root hairs. It was found that root hairs, cultivated in damp air, which did not change in 4 per cent sucrose solution, plasmolysed when brought into the same solution with 0.1 or 1 mg hetero-auxin per litre; this was attributed

¹⁾ Roots of oat seedlings, investigated by KÖGL, HAAGEN-SMIT and ERXLEBEN in the same manner in tap water, were less sensitive to the hetero-auxin: at a concentration of 0.001 mg per litre no retardation occurred.

to negative osmose. The plasmoptysis occurred more frequently in the β -indolyl-acetic acid than in a hydrochlorid acid solution of about the same p_H ; this was put down to the influence of the high molecular anion of the growth substance.

Negative osmose was supposed to cause the shortening of superficial cells of the root and cells of the root cap also, occasioned by bringing the root from the damp air into a solution containing hetero-auxin.

Undoubtedly CZAJA goes too far, in considering the inhibiting effect of hetero-auxin upon the normal growth of roots also explained by negative osmose.

For my experiments show that the higher acidity caused by the hetero-auxin, which is the main cause of the negative osmose, has no influence on the growth of root hairs and roots.

Summary.

The growth of the root hairs as well as of the roots of *Agrostemma Githago* L. is inhibited by the addition of hetero-auxin. The root hairs, however, are less sensitive to the growth substance, being inhibited only about 20 per cent at a concentration which causes a maximal inhibition of the growth of the roots ($\frac{1}{2}$ mg per litre).

Solutions with the same p_H value as the solutions containing the hetero-auxin, obtained by the addition of acetic acid, did not show any inhibition of the growth either of the root hairs or of the roots. This indicates a specific influence of the growth substance.

Hetero-auxin proved to be unable to produce chemotropic curvatures of root hairs of the above-mentioned object.

The investigations were carried out in the Laboratory for Plant Physiology at the State University of Groningen. I wish to express my hearty thanks to Prof. Dr. W. H. ARISZ for his help and constant interest.

LITERATURE CITED.

- CHOLODNY, N. (1924). Über die hormonale Wirkung der Organspitze bei der geotropischen Krümmung. *Ber. dtsh. bot. Ges.* **42**, 356.
- CZAJA, A. TH. (1935). Wurzelwachstum, Wuchsstoff und die Theorie der Wuchsstoffwirkung. *Ber. dtsh. bot. Ges.* **53**, 221.
- FARR, C. H. Studies on the growth of root hairs in solutions. (1927 a) I. The problem, previous work and procedure. *Amer. Journ. of Bot.* **14**, 446.
- (1927 b) III. The effects of concentrations of CaCl_2 and Ca(OH)_2 . *Amer. Journ. of Bot.* **14**, 553.
- KÖGL, F., HAAGEN-SMIT, A. J. und ERXLEBEN, H. (1934). Über den Einfluss der Auxine auf das Wurzelwachstum und über die chemische Natur des Auxins der Graskoleoptilen. *Z. Physiol. Chemie*, **228**, 104.
- KOSTERMANS, D. (1935). Over hetero-auxine. *Diss. Utrecht*.
- NIELSEN, N. (1930). Untersuchungen über einen neuen wachstumsregulierenden Stoff: Rhizopin. *Jb. Wiss. Bot.* **73**, 125.

- SEIDEL, K. (1924). Untersuchungen über das Wachstum und die Reizbarkeit der Wurzelhaare. Jb. Wiss. Bot. **63**, 501.
- STRUGGER, S. (1926). Untersuchungen über den Einfluss der Wasserstoffionen auf das Protoplasma der Wurzelhaare von *Hordeum vulgare* L. (I). Sitz. ber. Akad. Wiss. Wien Abt. I **135**, 453.
- (1928). Untersuchungen über den Einfluss der Wasserstoffionen auf das Protoplasma der Wurzelhaare von *Hordeum vulgare* L. (II). Sitz. ber. Akad. Wiss. Wien Abt. I. **137**, 144.
- (1932). Die Beeinflussung des Wachstums und des Geotropismus durch die Wasserstoffionen. Ber. dtsch. bot. Ges. **50**, 77.
- THIMANN, K. V. (1935). On the plant growth hormone produced by *Rhizopus suinus*. J. Biol. Chem. **109**, 279.

Anatomy. — *Über die Entwicklung des Walhirns.* Von W. RIESE (Lyon).
(Communicated by Prof. C. U. ARIËNS KAPPERS.)

(Communicated at the meeting of November 30, 1935).

In einer Reihe früherer Veröffentlichungen habe ich Merkmale des Cetaceengehirnes beschrieben, die ich in ursächlichem Zusammenhang mit den besonderen Lebensbedingungen dieser Ordnung bringen zu sollen meinte. In dieser Auffassung wurde ich bestärkt durch die Tatsache, dass, wie schon lange bekannt, fast alle Organsysteme der Cetaceen Formmerkmale aufweisen, die man zwanglos aus den biologischen Bedingungen verstehen zu können glaubt. Auch andere Autoren (JELGERSMA) haben gewisse Merkmale des Cetaceengehirnes mit Funktionen in Beziehung gebracht, die in der Lebensweise der Wale begründet sind. An sich ist es ja auch nichts Aussergewöhnliches, dass unter bestimmten biologischen Bedingungen ein Formwandel bestimmter Strukturen eintritt (etwa Atrophie des Sehorganes während des Lebens in der Dunkelheit u. dergl. m.). Das Besondere aber der bei den Walen vorliegenden Verhältnisse liegt darin, dass es sich nicht um gelegentliche und lokale, sondern um gesetzmässige und generelle Formveränderungen handelt, die sich an allen Organsystemen, auch am Zentralnervensystem abspielen, in den Bauplan eingreifen, und kaum anders als durch generelle, den gesamten Organismus in Mitleidenschaft ziehende biologische Bedingungen erklärt werden können. Kaum ein anderes Untersuchungsobjekt scheint mehr geeignet, dem Problem der Beziehung zwischen anatomischer Organisation und Umwelt nachzugehen; sind die Lebensbedingungen der Wale doch grundverschieden von denen, die ihrer Stellung im zoologischen System (Säuger) entsprechen.

Die Tatsache nun, dass das Walhirn spezifische Formmerkmale aufweist, welche die Landsäuger nicht besitzen, führt auf die Vermutung, dass diese im Laufe der Stammesgeschichte erworben wurden, damit aber zugleich auf das Studium der Entwicklungsgeschichte des Walgehirnes. In meiner

ersten Mitteilung über diesen Gegenstand¹⁾ verglich ich das foetale Walhirn mit dem Gehirn des erwachsenen Delphins. Aus der inzwischen erschienenen Arbeit von RICHARD B. WILSON ist aber ersichtlich, dass Unterschiede auch im Hirnbau der beiden Unterordnungen der Cetaceen bestehen, so vor allem im Rhinencephalon. Das foetale Gehirn von Megaptera boops ist daher in erster Reihe mit dem Gehirn eines erwachsenen, echten Bartenwales zu vergleichen; der Vollständigkeit halber werde ich aber auch in dieser Mitteilung jeweils auf Verhältnisse am erwachsenen Delphin hinweisen, der bekanntlich zur Gruppe der Zahnwale gehört. Diese Vergleiche sollen etwa vorhandene Unterschiede zwischen der Ausgangs- und Endstufe der Entwicklung des Walhirnes festzustellen ermöglichen. Es muss aber auch eine foetale Hirnstufe eines Landsäugers zum Vergleich herangezogen werden. Aus begrifflichen Gründen wäre das Gehirn einer den Walen nahestehenden Ordnung das geeignetste Objekt; da aber hier Probleme zoologischer Verwandtschaften aufgeworfen werden, die unserer Kompetenz entzogen sind, andererseits die foetalen Verhältnisse an keinem Gehirn gründlicher studiert wurden als am menschlichen, und weil es sich nicht um Detailfragen sondern um prinzipielle Fragestellungen handelt, so entschloss ich mich zum Vergleich mit dem foetalen menschlichen Gehirn (wie ich dies auch schon in meiner ersten Mitteilung getan habe). Das grosse Werk HOCHSTETTERS mit den ihm beigegebenen Tafeln erleichtert diese Aufgabe. Trotz aller berechtigten Bedenken, die man gegen das Vergleichsverfahren erheben kann, wird man es doch an so ausserordentlich jungen Entwicklungsstufen billigen dürfen.

Analog den von HOCHSTETTER (Beiträge, I. Teil, S. 90 ff.) beschriebenen Verhältnissen kann man auch bei Megaptera boops an frontalen Schnittebenen durch das Endhirn (Fig. 2) eine leicht muldenförmige, laterale Ausbiegung der beiden medialen Hemisphärenwände feststellen, der eine Verdickung der embryonalen Hirnsichel entspricht. Auch die von HOCHSTETTER getroffenen Feststellungen über die verschiedene Wandstärke (im Bereich des Stirnteils die mediale Wand stets am dünnsten, die laterale Wand etwas basal von der Mitte ihrer Höhe am dicksten), haben für Megaptera boops ihre volle Gültigkeit.

Die als Ganglien Hügel bezeichnete und nach den Feststellungen von KODAMA bereits bei 0.7—1.0 cm langen Embryonen angedeutete ventrale Verdickung des Hemisphärenbläschens ist bei dem Embryo von Megaptera boops in voller Ausbildung vorhanden. An seinem frontalen Ende grenzt er sich relativ scharf gegen die übrige Hemisphärenblasenwand ab. Er lässt deutlich die bekannte Gliederung in zwei Abschnitte erkennen, welche durch eine stellenweise tiefe Furche (fiss. paleo-neostriatica, KAPPERS) von einander getrennt sind (Fig. 1). Der mediale Teil ist, wie ich ebenfalls

¹⁾ Das wertvolle Untersuchungsobjekt (Fig. 9) verdanke ich Herrn Prof. H. M. DE BURLET, Groningen.

in Übereinstimmung mit KODAMA feststellen kann, viel stärker tingiert als der laterale. Auch entspricht die Furche an der Oberfläche ungefähr der Grenzlinie zwischen dem medialen und lateralen Teil. Der mediale Teil lässt sich nur in mittleren Ebenen des Ganglienhügels abgrenzen, m.a.W. er durchzieht ihn nicht in seiner ganzen fronto-occipitalen Ausdehnung. Dagegen lässt sich beobachten, dass in den caudalen Ebenen, in denen zwar eine Abgrenzung zwischen medialem und lateralem Teil des Ganglienhügels nicht mehr durchführbar ist, bis weit nach hinten die tiefere Tingierung der medialen Gebiete des hier einfachen Ganglienhügels nachweisbar bleibt. Deutlich ist ferner bei Megaptera boops eine basale Verdickung des medialen Teils der medialen Hemisphärenwand vorhanden: sie hängt weiter hinten, wie dies von HOCHSTETTER (l.c. S. 92) beschrieben wird, mit der Kommissurenplatte zusammen. Die diese Vorwölbung gegen den Ganglienhügel abgrenzende basale Vorderhirnrinne ist sehr tief.

Was das Rhinencephalon und den Aufbau der Hemisphärenwand anbetrifft, so verweise ich auf meine früheren Mitteilungen über diesen Gegenstand. In Bezug auf das Rhinencephalon muss ich freilich eine ergänzende Bemerkung machen, die für die Interpretation der Befunde wesentlich ist: Ich habe, wie gesagt, seinerzeit das foetale Gehirn von Megaptera boops mit dem Gehirn des erwachsenen Delphins verglichen. Da dieser anosmatisch ist, bei Megaptera boops andererseits ein deutliches Riechhirn angelegt wird, glaubte ich mich berechtigt, den an erwachsenen Exemplaren festzustellenden Riechhirnmangel als erworbenen, aus der Anpassung an das Wasserleben zu verstehenden Defekt zu erklären. Inzwischen ist aus dem Holländischen Institut für Hirnforschung die Arbeit von RICHARD B. WILSON erschienen, aus welcher einwandfrei hervorgeht, dass das erwachsene Gehirn eines echten Bartenwals (*Balaenoptera sulfurea*) ein wohlentwickeltes Rhinencephalon besitzt. WILSON gibt S. 425/27 seiner Arbeit eine eingehende Beschreibung dieses Hirnteils (s.u.).

In Bezug auf den Aufbau der Hemisphärenwand bemerke ich, dass die mediale Hemisphärenwand sich, wie ich früher ausführte, aus drei Schichten aufbaut, indem, wie dies schon HIS, S. 92 an menschlichen Foeten feststellte, die Pyramidenzellen scheidel- und medianwärts abnehmen, ferner aber auch die äussere, kernärmere Zwischenschicht scheidelwärts überhaupt verschwindet; in ihren basalen Abschnitten sind sogar nur zwei Schichten abzugrenzen, deren eine, der Hemisphäre zugekehrte, stellenweise geradezu frei von zelligem Baumaterial erscheint (s. hierzu weiter unten). Die von HOCHSTETTER an menschlichen Embryonen abgeschiedenen frontalen Fornixbündel (Figg. 73—78 in HOCHSTETTERS Beiträgen, 1. Teil) sind bei Megaptera boops nicht zu ermitteln. Die Anlage der eigentlichen Fornixfaserung findet HOCHSTETTER an dem einer typisch gebauten Rindenschicht entbehrenden Randteil der medialen Hemisphärenwand (über dem Cavum Monroi und dem Zwischenhirn gelegen). Die entsprechende Hirnpartie ist an den Schnitten meines Exemplars von Megaptera boops hell, auf Grund des Fehlens von

Baumaterial. Am erwachsenen Delphingehirn sind nach ADDISON Fornixfasern vorhanden. Ebenso bildet WILSON auf Fig. 3 seiner Arbeit einen deutlichen Fornix ab. Ob eine dorsal von dieser Stelle gelegene (bei Megaptera boops freilich nur auf einer Seite nachweisbare) Verdickung der medialen Hemisphärenwand (Fig. 2) als Hippocampusanlage anzusprechen ist (HOCHSTETTER), bleibe dahingestellt; ich halte es für sehr zweifelhaft.

Nach HOCHSTETTERS Feststellungen besitzt der menschliche Foetus von 46.5 mm SSL bereits eine deutliche vordere Commissur (s. Fig. 76 bei HOCHSTETTER). KODAMA findet sie schon bei 4 cm angelegt. Was die Verhältnisse bei dem Foetus von Megaptera boops anbetrifft, so kann ich auf wenigen Schnitten einer der Hochstetterschen Figuren entsprechenden Höhe ein äusserst zartes Band ermitteln, das der Lage nach als Anlage einer unscheinbaren Commissura ant. angesehen werden könnte (Fig. 2). Von der Anlage eines Balkens ist natürlich noch nichts zu sehen. WILSON beschreibt beim erwachsenen Wal die vordere Kommissur als ein kleines Bündel von Fasern, unmittelbar vor der vorderen Fornixsäule. Der Balken sei in seinem vorderen Teil dick; kaudalwärts verdünne er sich zunehmend, bis zum breiten Splenium. Ich habe früher daran erinnert, dass sowohl vordere Kommissur wie Balken beim Delphin verschwindend gering sind (s. J. Psychol. u. Neurol., 31, 1925), woraus ich auf eine geringe Bedeutung der Cetaceenrinde als Kommissurenrinde schloss. Nach ADDISON sei wahrscheinlich überhaupt nur der hintere d. h. der Balkenanteil der vorderen Kommissur beim Delphin vorhanden, der vordere, eigentlich rhinencephale, fehle dagegen völlig. Sehr deutlich ist bei dem Embryo von Megaptera boops der von HOCHSTETTER (l.c. S. 98) erwähnte, wulstförmige Fortsatz des Ganglienhügels vorhanden, der sich an der Wand des Cavum Monroi bis hinab in das Gebiet des Stielkonustrichters erstreckt, und der nach HOCHSTETTER nicht dem Striatum zugerechnet werden darf, vielmehr sein Material restlos zur Bildung der Kommissurenplatte zur Verfügung stellt. Diese Frage kann hier nicht entschieden werden; da aber die Vorderhirnkommissuren beim erwachsenen Wal relativ reduziert sind, andererseits das Striatum bis weit hinab in die Tiefe reicht, in hinteren Ebenen die Basis des Gehirns bildend, so wäre m. E. auf Grund dieser Tatsachen ernsthaft zu erwägen, ob der erwähnte Wulst nicht, wenigstens beim Wal, doch Bildungsmaterial für das Striatum zur Verfügung stellt.

Die Stammganglien (Fig. 3) sind bei Megaptera boops im Gegensatz zu den zum Vergleich herangezogenen, in der allgemeinen Entwicklungsstufe annähernd übereinstimmenden menschlichen Foeten von HOCHSTETTER und KODAMA noch recht undifferenziert. Eine scharfe Unterscheidung zwischen einem als Striatum im engeren Sinne (Neostriatum KAPPERS) und einem als Pallidum (Paleostriatum KAPPERS) anzusprechenden Anteil ist hier noch nicht durchführbar. Auf der Höhe des Foramen Monroi sieht man Fasern von der inneren Kapsel abzweigen und in einem nach

oben offenen Bogen eine durch diesen Bogen und die übrige Masse der inneren Kapsel abgeschlossene Zellmasse umgreifen, die ich geneigt bin als Putamen aufzufassen, und zwar im Hinblick auf ähnliche Anordnungen am erwachsenen Delphingehirn, auf analoge Verhältnisse, wie sie anzutreffen sind auf Fig. 4b S. 16 der Arbeit von KODAMA, endlich auch auf Fig. 4, S. 645 der Arbeit von J. FAUL (über die Entwicklungsgeschichte des Claustrums). — Es ist mir nicht möglich eine geschlossene Anlage des

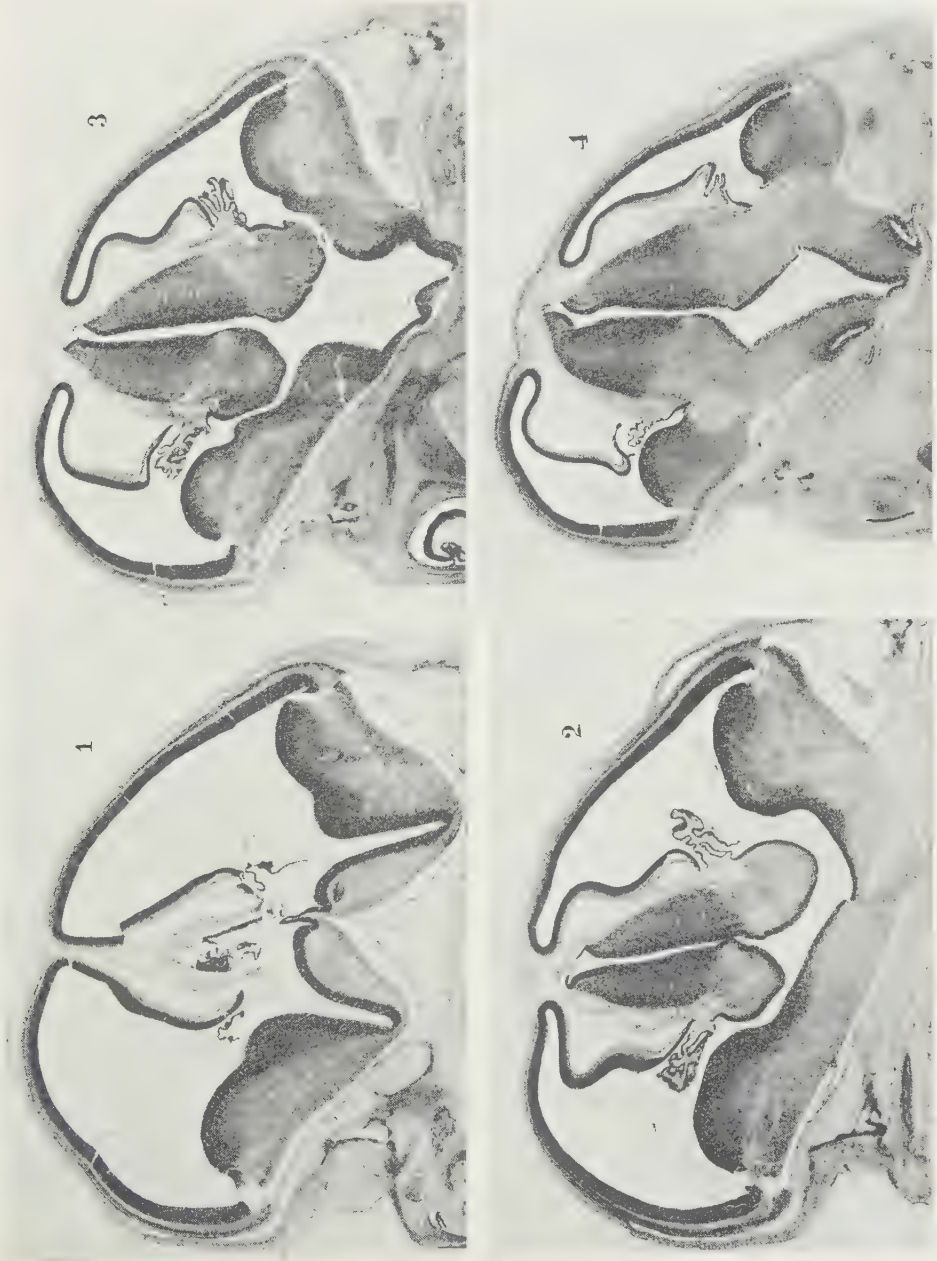


Fig. 1 4.

N. caudat. zu entdecken. Nach KODAMA ist diese schon bei einem menschlichen Foetus von 4—5 cm Länge wahrzunehmen. Vielleicht stellt eine, auf einigen Schnitten des Walembryos medioventral vom Ganglienhügel festzustellende hellere Partie eine erste, freilich mehr diffuse Anlage des Nucl. caudatus dar. Aus dem Vorhandensein einer geschlossenen Putamenanlage zu einer Zeit, wo eine solche für den Nucl. caudatus bei Megaptera boops noch fehlt, könnte ein Argument für die ontogenetisch frühere Reifung des Putamen bei diesem Tiere hergeleitet werden, im Gegensatz zum Menschen (vergl. E. DE VRIES).

Als Anlage eines Glob. pallid. lässt sich freilich der Ort (medial vom Neostriatum) bestimmen, wo sich das Pallidum entwickeln wird. Ob eine basal und lateral vom Putamen gelegene dichtere, bandförmige Zellanhäufung als Anlage des Claustrum anzusprechen ist, durch äussere Kapselfasern vom Putamen getrennt, mag dahingestellt bleiben; im Hinblick auf die sehr ähnlichen, von FAUL auf der bereits angeführten Figur seiner Arbeit abgebildeten Verhältnisse möchte ich es für wahrscheinlich halten.

Eine als Mandelkernanlage anzusprechende Zellanhäufung vermochte ich nicht zu entdecken.

Was das Zwischenhirn (Fig. 2—4) anbetrifft, so ist zunächst hervorzuheben, dass es ausserordentlich weit dorsalwärts reicht. Ich habe ein solches Verhalten weder an den von HOCHSTETTER noch KODAMA ihren Arbeiten beigefügten Abbildungen feststellen können. Nur HIS bildet auf S. 65, Fig. 43 einen Durchschnitt durch das Vorderhirn eines Embryos von 46 mm SSL ab, in dem der Thalamus ebenfalls recht hoch hinaufreicht. Indessen bleibt hier immer noch zwischen der Decke des Zwischenhirns und der dorsalen Kante der Hemisphären ein beträchtlicher Zwischenraum; bei Megaptera boops reicht der Thalamus so hoch hinauf, dass seine Decke stellenweise in gleicher Höhe mit der dorsalen Hemisphärenkante zu liegen kommt. Diese starke dorsale (und frontale) Entwicklung des Thalamus ist auch am erwachsenen Delphin nachweisbar. Das Chiasma opt. (Fig. 4) ist sehr leicht aufzufinden. Eine dahinter befindliche, zarte, aber deutliche Kommissur deute ich (in Übereinstimmung mit Angaben von HOCHSTETTER f. d. menschlichen Foetus gleicher Entwicklungsstufe) als Meynertsche Kommissur. Diese ist beim erwachsenen Delphin nach HATSCHEK und SCHLESINGER stark entwickelt. Der Nerv. opt. setzt sich beiderseits mit einer tief dunkel tingierten, massiven Zellmasse in Verbindung, die ein Lumen einschliesst, welches sich bis in den N. opt. selbst fortsetzt (Recessus opticus). Dadurch entsteht ein Bild ähnlich dem, wie es HIS auf S. 89 seiner „Entwicklung“ abbildet (s. unsere Fig. 4). Die Anlage der Corpora mamillaria, ebenso wie die des von ihnen ausgehenden Fasersystems des Ped. corp. mamill. ist an dem HOCHSTETTERSchen menschlichen Exemplar schon recht deutlich; bei Megaptera boops habe ich von beiden Bildungen nichts entdecken können. Das Corp. mamill. ist nach HATSCHEK und SCHLESINGER beim erwachsenen Delphin klein,

eine Angabe, die im wesentlichen mit den von ADDISON erhobenen Befunden übereinstimmt. WILSON erinnert an die Angabe von GULDBERG, wonach beim erwachsenen Wal (*Balaenoptera musc.*) das corp. mamillare nur als eine leichte Verdickung in der Wand des tuber ciner. erscheint.

Während der Plexus ventr. lat. deutlich vorhanden ist, ist es im dritten Ventrikel zur Bildung eines wirklichen Plexus noch nicht gekommen.

Über die Ausbildung der Hypophyse am erwachsenen Exemplar schreibt WILSON folgendes (p. 425 s. Arbeit): „In Megaptera boops the hypophysis is also very large“. In Übereinstimmung mit diesen Angaben finde ich an dem von mir untersuchten Foetus desselben Tieres den Hirnanhang bereits beträchtlich entwickelt (Fig. 5). Deutlich ist die Neurohypophyse (Fig. 6) von der Adenohypophyse (Fig. 5—6) zu unterscheiden. Auffallend gering ist das Bindegewebslager im Inneren der Hypophyse entwickelt, wenn man unsere Präparate vergleicht mit denen, die HOCHSTETTER von dem ungefähr entsprechenden menschlichen Entwicklungsstadium abbildet (Tafel VIII, Fig. 32 a—i, II. Teil, 2. Lief. der „Beiträge“). Die Unterscheidung einer Mittelwulstplatte, einer frontalen Wandplatte der Hypophyse ist auf unseren (Frontal-) Schnitten kaum durchführbar. Dem Gesamteindruck nach entspricht der Hirnanhang unseres Walfoetus eher den auf Figg. 33 a—e von HOCHSTETTER abgebildeten wesentlich älteren menschlichen Entwicklungsstadien (Foet. von 84.0 mm SSL).

Im Mittelhirn ist bereits deutlich angelegt das Faserareal der hinteren Kommissur und des Fasc. retroflexus (Fig. 5). Dieser ist auf seinem ganzen Verlaufe auf das Deutlichste zu verfolgen und zeigt auch bereits die ihm eigentümliche Konfiguration. An einigen wenigen Schnitten ist in der dem roten Kern eingeräumten Gegend eine entsprechende Zellmasse zu entdecken, jedoch nicht als ein wohlumschriebenes Gebilde. Unserer früher geäußerten Meinung nach tritt der rote Kern beim Delphin in Form von zerstreut liegenden, grossen Zellen auf.

Zu der Tatsache, dass von einem Nerv. oculomotorius nichts zu sehen ist ebenso wenig wie von einem Nucl. nerv. oculomot., ist zu bemerken, dass die Serie aus technischen Gründen an einigen Höhen defekt geworden ist. Übrigens sind nach WILSON die Nuclei III und IV am erwachsenen Exemplar relativ klein. Leider kann aus den genannten Gründen über das Ganglion habenulae, Gangl. interpedunculare, die Epiphyse, das Corp. genic. med. et lateral., Substantia nigra und Pes nichts Sicheres ausgesagt werden.

Zum Studium des Kleinhirnes wählen wir einen Querschnitt, dessen Gesamtkonfiguration in grossen Zügen den von HOCHSTETTER auf Fig. 78—87, Tafl. 20 u. 21 seiner „Beiträge“ (II. Teil) abgebildeten Entwicklungsstadien eines menschlichen Foetus v. 42.0 cm SSL entspricht. Auch die Konfiguration des 4. Ventrikels ist ungefähr die gleiche, die Plexusbildung ist an den der Medulla oblongata dorsal unmittelbar auf- und seitlich anliegenden Partien der Tela weit fortgeschritten, und das bindegewebige Stroma ist hier deutlich von der epithelialen Zotte zu

unterscheiden. Der 4. Ventrikel ist dorsal bedeckt von der Kleinhirnsplatte, über die seinerseits der kaudale Abschnitt des Mittelhirnblindsackes sich lagert (Fig. 7). Die äussere Konfiguration des letzteren ist etwas anders als beim Menschen.

Die cerebellare Platte lässt deutlich drei Schichten erkennen (Fig. 8):

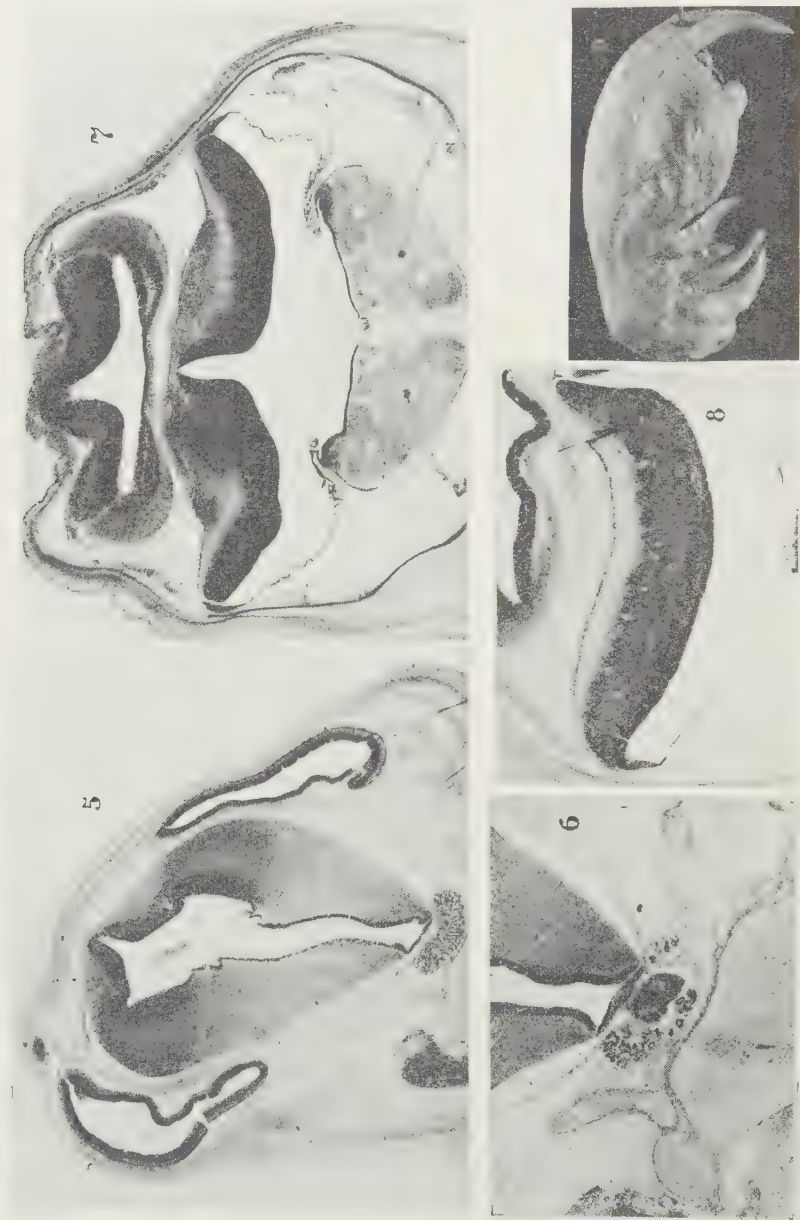


Fig. 5—9.

1. zu unterst, dem Lumen des vierten Ventrikels am nächsten, eine dunkle Zone, mit dichter Zellbesiedlung; diese ist schmal. 2. Eine sich dieser

Zone dorsal anschliessende, breite Mittel-(Mantel)-zone, mit etwas weniger dichter, aber immer noch reichlicher Zellbesiedlung; 3. Endlich zu oberst eine Zone (äussere Marginalschicht) in der die zelligen Elemente in noch mehr gelockerter Anordnung liegen. Die dorsoventrale Ausdehnung dieser letzten Schicht ist nicht überall gleichmässig, was durch die ungleiche dorsale Begrenzungslinie der cerebellaren Platte auf verschiedenen Höhen bedingt wird.

Die gegenseitige Abgrenzung der 2. und 3. Schicht ist scharf, schärfer als sie an der zum Vergleich etwa heranzuziehenden Fig. 88, Taf. XXI, II. Teil der „Beiträge“ v. HOCHSTETTER zum Ausdruck kommt. In diesem Zusammenhange darf daran erinnert werden, dass nicht nur die Kleinhirnschichten sondern auch die Schichten der embryonalen Hemisphärenrinde sich schärfer gegeneinander absetzen als bei entsprechenden menschlichen Entwicklungsstadien. Im übrigen geht aus diesen Tatsachen hervor, dass die Feststellung von HIS: „Die grundlegenden Vorgänge histologischer Scheidung sind im gesamten Markrohr dieselben“ (S. 24 seiner „Entwicklung“) auch für das Kleinhirn volle Gültigkeit beanspruchen kann.

HIS hatte den nach und nach hervortretenden Gegensatz zwischen der dicht gefügten radiär streifigen Innenplatte, der locker gefügten, Neuroblasten führenden Mantelschicht und dem kernfreien Randschleier nur an den verschiedenen Abschnitten des Rückenmarks, Rautenhirns, Mittelhirns und Vorderhirns ermittelt; er bewahrheitet sich auch, wie wir sehen, am Kleinhirn. Ganz entsprechend den Angaben von HIS sind es auch Mantelschicht und Randschleier, die sich verbreitern, wo die Wand an Dicke zunimmt.

Auf etwas höheren als den soeben studierten Ebenen ist besonders deutlich die bereits auf dieser frühen Entwicklungsstufe ungewöhnlich starke Entwicklung des VII Hirnnerven ausgesprochen, die WILSON beim erwachsenen Exemplar vermerkt. Das Gleiche gilt für den V. Hirnnerven. Das Kerngebiet des VII Hirnnerven ist auch beim erwachsenen Delphin (HATSCHKE und SCHLESINGER) sehr mächtig. Diese Autoren beschreiben ein die ventrale Kontur des Querschnittes der Medulla oblongata vorbauchendes Tuberculum faciale.

Auf Schnitten (Fig. 7), die etwa der Höhe der auf Figg. 18 und 19 von WILSON abgebildeten entsprechen, sind folgende Gebilde der Medulla oblongata deutlich abzugrenzen: 1. Der Hypoglossuskern. Dieser tritt bei den Cetaceen (HATSCHKE und SCHLESINGER, WILSON) in Form einer vierfachen Zellgruppe auf. In Übereinstimmung mit WILSON sind bereits beim Foetus folgende Abteilungen an ihm abzugrenzen: Pars dorso-lat., P. dorso-med., P. ventro-lat., und P. ventro-med. 2. Jederseits eine mächtige Oliva infer., deren ventromediale Abschnitte sich durch besonders tiefe Tinktion und intensive Zellbesiedlung auszeichnen. 3. Lateral von der unteren Olive tritt der Nervus hypoglossus, noch weiter lateral der Nervus vagus aus. 4. Der Nucleus ambiguus zeigt bereits auf dieser frühen Entwicklungsstufe den von WILSON am erwachsenen Exemplar festgestellten relativ grossen Umfang. 5. Das Areal der absteigenden

Trigeminuswurzel ist deutlich ausgeprägt. 6. Das Areal des Corp. restiforme am lateralen Rande der Medulla oblongata ist oben aussen bedeckt von dem Saum des Corp. ponto-bulbare. 7. Deutlich ist endlich ein Recessus lat. ventr. IV vorhanden; in diesem ist es zur (mässigen) Plexusbildung gekommen.

Ergebnisse.

1. Die Bartenwale besitzen (im Gegensatz zu den Zahnwalen) ein deutliches Rhinencephalon. RICHARD B. WILSON beschreibt bei Balaenoptera sulfurea einen breiten Tractus olfactorius, einen Tract. olfact. med. et lat., einen Lobus pyriformis mit wohl entwickelten Gyri semilunar. und ambiens. Ferner einen Nucl. amygdalae. Es fehlt dagegen ein Bulbus olfactor. Der Autor bildet ausserdem einen deutlichen Fornix ab. Auch die vordere Kommissur sei als ein kleines Bündel von Fasern nachweisbar. Ein, wenn auch minimales Corp. mamill. sei von GULDBERG bei Balaenoptera musc. abgegrenzt worden. Einen Mandelkern hat WILSON selbst aufgefunden.

Ich habe bereits in meiner ersten Mitteilung über das foetale Walgehirn die deutliche Riechhirnanlage beschrieben und abgebildet. Die oben genannten, von WILSON am Gehirn des erwachsenen Wales abgegrenzten, mit dem Rhinencephalon in mittelbarer Beziehung stehenden Gebilde (Fornix, Commissur. ant., Corp. mamill., Nucl. amygdalae) — bei menschlichen Entwicklungsstadien etwa gleicher Stufe bereits deutlich vorhanden — fehlen am foetalen Walgehirn. Andererseits besitzt dieses bereits einen kräftigen Fascic. retroflexus; über diesen macht WILSON keine Angaben, beim Delphin ist er nach HATSCHKE und SCHLESINGER kräftig entwickelt; ich schliesse daraus, dass er bei den Cetaceen keine ausschliessliche Beziehung zum Rhinencephalon unterhält. Der Fascic. retroflexus ist auch an menschlichen, riechhirnlosen Früchten deutlich vorhanden (RIESE, GOLDSTEIN und RIESE). Bei dieser Gelegenheit darf daran erinnert werden, dass die Corpora mamillaria und die Commiss. ant. an menschlichen riechhirnlosen Früchten stark reduziert sind; der Fornix fehlt vollkommen; etwas reduziert ist der Mandelkern.

2. Die Hemisphärenrinde, die am Gehirn des erwachsenen Wales äusserst primitiv ist und nicht den typischen Aufbau der Säugerrinde (nach BRODMANN) erkennen lässt, zeigt am foetalen Exemplar alle Merkmale der foetalen Säugerrinde dieser Entwicklungsstufe. Die äusserst wichtige Frage, ob die Walrinde ein sechsschichtiges Foetalstadium durchläuft, kann an einem so jungen Material nicht entschieden werden. Ich hoffe, darauf zurückkommen zu können.

3. Die Stammganglien, die am Gehirn erwachsener Cetaceen einen hohen Grad der Grössenentwicklung erreichen, ohne indes stets eine so deutliche Differenzierung erkennen zu lassen wie bei den übrigen Säugern, sind am foetalen Gehirn noch undifferenziert. Der Sehhügel

zeigt von Anfang an seine bemerkenswerte Tendenz zur dorsalen Massenentwicklung.

4. Der Hirnanhang — am erwachsenen Wal von beträchtlicher Grösse — ist auch auf der hier untersuchten foetalen Entwicklungsstufe relativ weit fortgeschritten. Die Hypophyse eilt aus Gründen, die offenbar in der ausserordentlichen und frühzeitig einsetzenden Wachstumstendenz des riesigen Tieres liegen, der allgemeinen Entwicklung des Zentralnervensystems voraus.

5. Das Kleinhirn, am erwachsenen Exemplar ein Organ von ungewöhnlicher Grösse, hat auf der hier untersuchten foetalen Entwicklungsstufe keinen Entwicklungsvorsprung im Vergleich zu dem Vorderhirn oder dem übrigen Zentralnervensystem erreicht.

6. Der V. und VII. Hirnnerv — beim erwachsenen Wal sehr mächtig — erscheinen, wie zu erwarten war, auf dieser frühen Entwicklungsstufe als ungewöhnlich kräftige Gebilde.

7. Der Kern des XII. Hirnnerves lässt bereits auf dieser frühen Entwicklungsstufe die am erwachsenen Exemplar von WILSON festgestellte vierfache Gliederung erkennen.

Ich habe früher die absolute und namentlich die relative Überlegenheit der basalen Ganglien gegenüber Rinde und subcorticalem Mark als eine typische Eigenschaft des Gehirnes der Cetaceen beschrieben. In diesem Verhalten erblickte ich im Verein mit anderen Merkmalen des Cetaceengehirnes eine Annäherung (Konvergenz) an den Hirnbau niederer Vertebraten.

Hierfür spricht auch das von WILSON beschriebene Verhalten des Nucl. hypoglossus. Dieser grosse Kern bewahrt beim Wal wie bei niederen Vertebraten die Verbindung mit dem Vorderhorn des Rückenmarks. Nach WILSON ist das Fehlen von Geschmacksknospen auf der Zunge der Wassersäuger und die dadurch unterbliebene frontale Verlagerung des Hypoglossuskernes für die Rückkehr zum primitiven Verhalten des Zungenmuskulkernes verantwortlich zu machen.

Die das Gehirn der erwachsenen Cetaceen charakterisierende Relation zwischen Basalganglien einerseits, Rinde und subcorticalem Mark andererseits, ist auf der hier untersuchten Foetalstufe von Megaptera noch nicht vorhanden. Die Striatumanlage ist noch nicht weit fortgeschritten. Andererseits ist bereits ein kräftiges subcorticales Faserfeld (innere Kapsel) nachweisbar, wie auch eine dem allgemeinen Entwicklungsstadium entsprechende Differenzierung der embryonalen Hemisphärenrinde. Nur das Zwischenhirn ist bereits ein massiver Hirnteil. Auffallend ist, dass der das erwachsene Walhirn kennzeichnende relativ grosse Umfang des Kleinhirns an dem hier untersuchten Foetalzustande noch nicht nachweisbar ist. Verglichen mit entsprechenden menschlichen Entwicklungsstufen scheint das Kleinhirn des Foetus von Megaptera boops weder an Grösse noch an Differenzierungsgrad vorausgeeilt zu sein. Kurz, das

Vorderhirn nimmt auf der hier untersuchten frühen Entwicklungsstufe des Walgehirnes eine führende Stellung ein; diese Stellung wird es später verlieren; noch aber hat es sie nicht aufgegeben. Es liegt nahe, diesen Unterschied anatomischer Relationen in Beziehung zu setzen zu dem Unterschied funktioneller Relationen im intra- und extra-uterinen Leben.

Es erhebt sich nunmehr die Frage, welche Faktoren für den Zeitpunkt des ersten Auftretens und der Reife der einzelnen Hirnteile verantwortlich sind. Das Rhinencephalon ist bei den erwachsenen Walen zwar deutlich vorhanden, aber im Ganzen und in einzelnen Anteilen doch primitiv. Die analoge Entwicklungsstufe eines mikrosomatischen Landsäugers (Mensch) zeigt bereits deutlich rhinencephale Organe, die dem Walfoetus noch fehlen. Daraus ist zu ersehen, dass Hirnteile, die im späteren Leben funktionell zurücktreten, auch spät reifen.

Den Vorsprung der Hypophyse kann man zweifellos aus Anforderungen der Wachstumstendenz verstehen, die bereits im foetalen Organismus wirksam sein muss und daher unmittelbare und dringliche funktionelle Ziele verfolgt. Gewisse typische Relationen, wie die Vorderhirn-Kleinhirnrelation, oder die zwischen Rinde und subcortalem Mark einerseits, den basalen Ganglien andererseits, erscheinen spät, erst nachdem die typische „Säugerrelation“ durchlaufen ist.

LITERATURVERZEICHNIS.

- ADDISON, W. H. J. On the rhinencephalon of *Delphinus delphis*. J. comp. Neur., **26**, 1915.
- EDINGER, T. Die fossilen Gehirne. Berlin, J. Springer, 1929.
- FAUL, J. The comparative ontogenetic development of the corpus striatum in Reptiles; und: The ontogenetic development of the claustrum in man. Proc. Kon. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, **29**, 1926.
- HATSCHKE, R. und SCHLESINGER, H. Der Hirnstamm des Delphins. Arb. Neur. Inst. Wien, Heft 9, 1902.
- HERTWIG, O. Das Werden der Organismen. Eine Widerlegung von Darwins Zufallstheorie. Jena, G. Fischer, 1916.
- HIS, W. Die Entwicklung des menschlichen Gehirns während der ersten Monate. Leipzig, Hirzel, 1904.
- HOCHSTETTER, F. Beiträge zur Entwicklungsgeschichte des menschlichen Gehirns. I. Teil, Wien und Leipzig, 1919; II. Teil. 1. Lief., 1923, 2. Lief., 1924, 3. Schluss-Lief., 1929.
- JELGERSMA, G. Die Funktion des Kleinhirns. Journ. f. Psych. u. Neur., **23**, Heft 5 u. 6.
- ARIËNS KAPPERS, C. U. Die vergleichende Anatomie des Nervensystems der Wirbeltiere und des Menschen. Haarlem. De erven F. Bohn, 1920, und Le développement ontogénétique du corps strié des oiseaux en comparaison avec celui des mammifères et de l'homme, Arch. suiss. Neur. et Psych. **13**, 1923.
- KODAMA, S. Über die Entwicklung des striären Systemes beim Menschen. Orell Füssli, Zürich, 1927.
- RAWITZ, B. Das Zentralnervensystem der Cetaceen. II. Arch. mikr. Anat. u. Entw. Gesch., **73**, 1909 und III, **75**, 1910.

- RIESE, W. Über Riechhirnmangel. Zeitschr. ges. Neur. u. Psych., **69**.
 ——— Zur vergleichenden Anatomie der striofugalen Faserung. Anat. Anz., **57**, 1924.
 ——— Über faseranatomische Verbindungen im „striären System“ der wasserlebenden Säuger. Zeitschr. ges. Neur. u. Psych., **90**, Heft 3 u. 5.
 ——— Beiträge zur Faseranatomie der Stammganglien. J. Psych. u. Neur. **31**, 1924.
 ——— Formprobleme des Gehirns. 1. Vorl. Mitt. Körperform und Hirnform. J. Psych. u. Neur., **31**, Heft 3 u. 4.
 ——— Formprobleme des Gehirns. 2. Mitt. Über die Hirnrinde der Wale. Ein Beitrag zum Furchungsproblem. J. Psych. u. Neur., **31**, Heft 5.
 ——— Über die Stammganglien der Wale. J. Psych. u. Neur., **32**.
 RIESE, W. Bau und Leistungen des Zentralnervensystems eines vierjährigen riechhirnlosen Kindes. Deutsche Zeitschr. Nervenheilkunde, **89**, 1925.
 ——— Über anatomische und funktionelle Differenzen im optischen System. J. Psych. u. Neur., **32**, Heft 6.
 ——— Über den Bau und die Leistungen des akustischen Systems der Wale. J. Psych. u. Neur., **34**, Hef. 3 u. 4.
 ——— Anpassungen und Konvergenzen am Gehirn. Die Naturw., **15**, Heft 40.
 ——— Konvergenzerscheinungen am Gehirn. J. Psych. u. Neur.; **33**, Heft 1 u. 2.
 ——— Über das Vorderhirn des Walfoetus (*Megaptera boops*). Anat. Anz., **65**, 1928.
 RIESE, W. und GOLDSTEIN, K. Klinische und anatomische Beobachtungen an einen vierjährigen riechhirnlosen Kinde. J. Psych. u. Neur., **32**.
 VIALLETON, L. Un problème de l'évolution. Montpellier, Coulet & fils. Librairie de l'Université, und: L'origine des êtres vivants. Paris, Librairie Plon, 1929.
 WILSON, R. B. The anatomy of the brain of the whale (*Balaenoptera sulfurea*). J. Comp. Neur., **58**.

Medicine. — *Remarks with regard to the "Courte instruction pour la détermination des variétés d'Anopheles maculipennis" by the Malaria Committee of the League of Nations.* By J. H. DIEMER and P. H. VAN THIEL. (From the Laboratory of Tropical Hygiene of the Institute of Tropical Medicine, University of Leyden. Director Prof. P. C. FLU.) (Communicated by Prof. J. VAN DER HOEVE.)

(Communicated at the meeting of November 30, 1935).

The Committee of Experts (CHRISTOPHERS c.s.) appointed by the Malaria Committee of the League of Nations has composed a short instruction for the determination of the different varieties of *Anopheles maculipennis*. By this publication it has done useful work, which may serve as a good guide for many persons. It gives rise to some remarks in consequence of the spread of the different varieties in relation to the modern race-circle theory ("Rassenkreislehre"), and also in consequence of the nomenclature of some varieties.

A. *The principle of the (geo)biotypes and (geo)biotype-circles.*

The Committee of the League of Nations mentioned above, while writing the key for the determination of the different varieties, has placed itself

on a morphological point of view and has given the name of varieties to the subdivisions of the old systematic species *Anopheles maculipennis*.

In his thesis DIEMER (1935), in the light of a historical-critical examination of the use of the categories species, subspecies, race, and variety, in old morphological systematics as well as in modern more physiological systematics, examined what systematical rank is due to these subdivisions. The term race should be avoided; it should be used only for products of culture. From a consequent morphological point of view *Anopheles maculipennis* is doubtless a species and the types are varieties, except probably *elutus*. But from a physiological point of view within the morphologically bounded species three physiologically bounded species may be distinguished, two of which are geobiototype-circles (= so-called "Rassenkreise") and one a biotype. Wrongly *Anopheles maculipennis* should be after HACKETT (1934) a "Rassenkreis".

A biotype — it comprises the morphological and the physiological part — is defined by DIEMER (1935) as "the organic structure type of all specimens, which have the same structure in the same stage of life and phaenotypically show only inconstant differences, which live in a coherent territory or in the same conditions of life, which in nature mate spontaneously and produce a perfectly fertile progeny".

These biotypes are "units of life", with which one has to do in the practice of malaria investigations. The following biotypes are known: *labbranchiae*, *atroparvus*, *elutus*, *messeae*, *melanoon*, *typicus*, and probably also *sicaulti* and *fallax*.

DIEMER further distinguishes between biotypes whose areas vicariate (= living in mainly adjoining areas, separated by climatic factors) and biotypes which replace each other in different environments. The former (the so-called geographical races) are named "geobiotypes" and the latter (the so-called biological and oecological races) "oecobiotypes". The latter do not concern us here.

Geobiotypes may be united into a "geobiototype-circle" (= *Formenkreis* of KLEINSCHMIDT and = *Rassenkreis* of RENSCH). It is a complex type, which DIEMER defines as "the organic structure type of all specimens, which in a certain area show only inconstant differences, in neighbouring areas on the contrary constant differences in one or more features, often showing such a transition that the types are separated by no cleft, and of which the neighbouring specimens mate under natural conditions and produce a very viable and fertile progeny"¹).

In the following part the principle of geobiototype-circles will be applied to *Anopheles maculipennis*, because it is of importance for our insight in

¹) In crosses between biotypes of different biotype-circles a certain degree of viability and fertility may occur, e.g. in the crossbreeding experiments by DE BUCK c.s. (1934) with *atroparvus* × *melanoon* and in those by VAN THIEL (DIEMER and VAN THIEL, 1935) with *atroparvus* × *messeae*. Neither do vicariating biotypes of the same circle always give rise to a viable and fertile hybrid generation, although this as a rule occurs.

the spread of the component parts of *Anopheles maculipennis* and the sexual affinity of these parts with respect to one another¹⁾. The data will be used from the maps published by the Committee of Experts. Here and there changes are made, which will be mentioned.

The first geobiototype circle is composed of the biotypes *labranchiae*, *atroparvus* and *elutus* and probably also of *sicaulti*. *Labranchiae* and *atroparvus* vicariate: *atroparvus* occurs from the North of Europe as far as the North of Italy, while *labranchiae* is found only in more southern countries, e.g. in Middle- and South Italy. Further DE BUCK c.s. (1934) succeeded in obtaining very fertile hybrids (all ♀ and part of ♂) by reciprocal crossbreeding experiments of *atroparvus* × *labranchiae*.

Also *elutus*, from a physiological and genetical point of view, may be classed in the same geobiototype-circle, while it vicariates with *labranchiae* and *atroparvus* and crosses of *atroparvus* ♂ × *elutus* ♀ gave viable larvae and few hybrid mosquitoes. Crosses of *labranchiae* × *elutus* failed owing to the eurygamy of both types. Although the viability of the hybrid generation here was not so great as in the cross *atroparvus* × *labranchiae*, still *elutus* fits very well in the same biotype-circle.

A further common physiological feature of the three types is their usually breeding in brackish water. From a morphological point of view, on the contrary, *elutus* is reckoned as a separate species next to *Anopheles maculipennis*, while the adults can be determined fairly well and the structure of the eggs deviates most from the eggs of the other types.

So far as is known at present, in the biotype-circle of *atroparvus*, *labranchiae*, *elutus* (Fig. 1), in Europe a line can be drawn from the South of Spain, northward of Sardinia, southward of Genoa towards the South of Russia; near Venice a line splits up towards the South through the Adriatic. North of this line *atroparvus* occurs, to the South-West *labranchiae* and to the South-East *elutus*. In the borderland one type may be found by the side of the other (In Gorino near Venice VAN THIEL even found 20 per cent *atroparvus* and 27 per cent *elutus*). *Sicaulti*, very congenial with *labranchiae*, taking the place of *labranchiae* in Morocco (ROUBAUD, 1935), probably fits in the same circle.

Messeae and *melanoon*²⁾ very likely compose the second geobiototype-circle. *Messeae* is found in Europe nearly wherever *atroparvus* lives, except in Spain, while it should occur moreover in the whole of Italy and in all the Balkans. *Melanoon*, on the contrary, should occur only in Albania, in the whole of Italy and on the east coast of Spain. According

¹⁾ For the Netherlands it means that it is theoretically not excluded that *atroparvus* and *messeae*, a more and a less malaria dangerous variety, mate and produce a progeny with a certain fertility. Practically the origin of hybrids has hardly any significance here, as is described in the thesis of DIEMER and in our article on the racial purity of *Anopheles maculipennis atroparvus* and *messeae*.

²⁾ The experiments of DE BUCK c.s. with "Italian *messeae*" concern also *melanoon*, as Dr. DE BUCK wrote to us.

to those data, published by the Committee of Experts, these biotypes do not vicariate clearly. However, it is very dubious if these data are right ¹⁾).



Fig. 1

In Italy at least one of us (VAN THIEL, 1933) found that many batches of ova were formerly determined as messeae, while they concerned still melanoon. Only in the North of Italy mosquitoes were found which by their eggs could not be differentiated from the Dutch messeae. We should not be surprised if there exists in Italy between messeae and melanoon a similar vicariation as between atroparvus and labbranchiae, viz. messeae at the utmost in the North of Italy and more southward only melanoon. Crossbreeding experiments could not be made here owing to the eurygamy of the two biotypes. However, morphologically and physiologically they

¹⁾ It will be possible to decide if melanoon and messeae occur in Italy side by side and if the last named is identical with the Dutch messeae, when an accurate examination will have decided if the eggs with the entirely or almost entirely dark design as a rule have a smooth intercostal film of the floats and the eggs resembling more Dutch messeae as a rule a striated one. We presume that in Italy both types are often identical because: 1°. HACKETT (1934) himself doubts the possibility of separating both in a number of localities. 2°. DE BUCK c.s. (1934) observed that females, reared from dark eggs, laid afterwards dark and more barred eggs and the reverse. 3°. The curves of the different characters of the eggs and the adults of dark barred and dark + dark barred eggs from Italy run greatly parallel (VAN THIEL, 1933).

differ so little that in nature sexual affinity in the borderlands may be assumed.

It is certain that the two biotypes do not belong to the first named circle:

1⁰. They do not vicariate with the other three biotypes (everywhere in the North of Europe messeae occurs mixed with atroparvus and very probably melanoon occurs in the South of Europe mixed with labranchiae or elutus). 2⁰. DE BUCK c.s. found that crosses of ♂ atroparvus × ♀ messeae produced dead embryos or hardly viable larvae which soon died. It is true, only once or twice we obtained adult hybrids, but these must have been sterile¹⁾, as crosses of ♂ atroparvus × ♀ melanoon gave DE BUCK c.s. many viable larvae and adults, which were much more sterile than the hybrid mosquitoes of atroparvus × labranchiae. 3⁰. Morphologically and physiologically messeae and melanoon differ more from atroparvus, labranchiae and elutus than they differ mutually.

Crosses of the type fallax (described by ROUBAUD from Normandy, 1934) ♂ × messeae ♀ were fertile; this seems to indicate that fallax may also belong to the same circle.

In fig. 2 the presumed spread of messeae and melanoon mentioned above



Fig. 2

¹⁾ This was not examined, as these experiments were made at a time when we were not yet aware of the significance of that examination.

is indicated. Where the identity of the local biotype with messeae or melanoon is very uncertain, this is indicated by "?".

Typicus remains, which from a physiological point of view is also a biotype, but does not belong to the two geobiototype-circles mentioned. Typicus stands alone. Although it is reckoned by MISSIROLI c.s. to the messeae-group — from a morphological point of view rightly —, it should not be reckoned to the two geobiototype-circles mentioned, because: 1^o. Typicus is spread over the whole of Europe and lives by the side of all biotypes mentioned (Fig. 3). 2^o. all hybrids, obtained by DE BUCK c.s. from crosses of ♂ atroparvus × ♀ typicus were sterile (crossbreeding

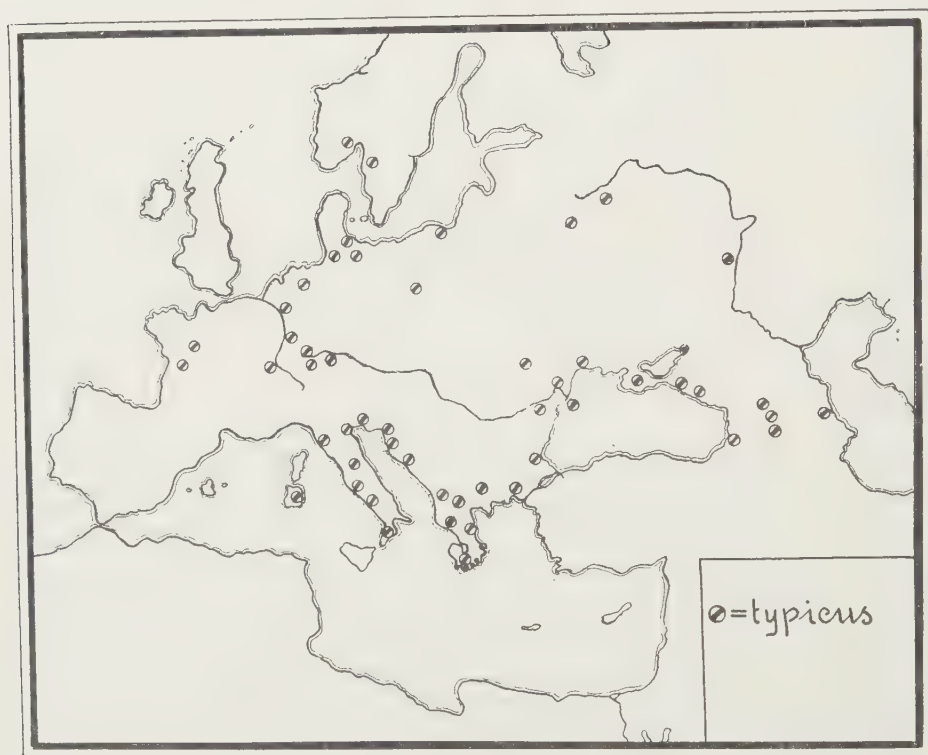


Fig. 3

experiments could not be made here owing to the eurygamy of typicus, of messeae and of melanoon).

B. *The nomenclature of the biotypes.*

FALLERONI (1926) distinguished in Italy within *Anopheles maculipennis* the variety messeae with the dark type of egg and the variety labbranchiae with the grey type of egg. In 1927 VAN THIEL separated in the Netherlands the variety atroparvus (as the small-winged race) from the long-winged "type" of the species *Anopheles maculipennis*, described by MEIGEN (1818).

In his opinion this variety had very probably nothing to do with the two varieties described by FALLERONI.

Besides messeae and labbranchiae FALLERONI (1926) observed a third type of egg, grey with only two transverse bands (simple banded). In that year he did not give a name to that type, but did so in 1932, viz. the variety basilii Falleroni. Previously MARTINI c.s. (1931) had mentioned this variety as the variety maculipennis Falleroni. They were of opinion that FALLERONI left for the type with the simple banded eggs the name of the species, maculipennis, because he had not given it a name in 1926. We do not think that this is right, because, as is obvious from the article of FALLERONI (1926) and is clearly said by him in 1932, "Nel 1926 ne feci un tipo a sè considerando.....", but after having made breeding experiments now "mi confermo nell'idea che possa formare una razza a sè, come *ritenni*¹⁾ nel 1926". He then proposed the name of basilii. So at first he had not in mind an identification with the type-species of MEIGEN.

Now VAN THIEL (1927) called the long-winged mosquito (with the dark-barred eggs, as became evident afterwards) in the Netherlands the systematic type, which was named by him (1933) "typicus Meigen", to distinguish it from messeae in Italy. As the Committee of Experts (1935) declared the mosquito with the simple banded eggs as the type, this was not done according to the law of priority.

Still we advise to follow the proposal of that Committee, because the biotype with the simple banded eggs is most spread (MISSIROLI c.s. 1933) and may have been described by MEIGEN (1818) for the following reason: As MEIGEN worked in Aix-la-Chapelle and as a rule collected there, we caught there July 1934 anophelines. We obtained 2 batches of messeae and 4 batches of ova of the simple banded type. So it is not clear whether MEIGEN described the mosquito with the simple banded or with the dark barred type of egg.

The spread of the mosquito with simple banded eggs will have been the main reason why the Committee of Experts accepted for that biotype the name "type", however without using the name "typicus". After COLLIER (1924) in such a case formerly the name typicus was added behind the name of the species, but nowadays the last name is repeated. Consequently the mosquito should be named variety maculipennis, but in order to prevent confusion we prefer to use the name "typicus". So it is obvious that this "typicus" has nothing to do with "typicus van Thiel (1933)", for which at present the name of messeae is definitively fixed.

On the nomenclature of messeae and melanoon we should like to remark the following: HACKETT (1934) separated the mosquito with dark eggs as the variety melanoon from the mosquito with dark barred eggs, viz. variety messeae. Both should occur in Italy side by side. However, we cannot accept this opinion, because the arguments to do so are not

¹⁾ Our italics.

convincing (see under *A* and VAN THIEL, 1933; ROUBAUD, 1934). We believe that in Italy one has usually to do with one biotype, which however is different from the mosquito with dark barred eggs from the Netherlands. The last named one is not named *messeae* by VAN THIEL, but other authors did so. It would have been better if the name *messeae* Falleroni was maintained for the mosquito with dark barred and often dark eggs and smooth or nearly smooth intercostal films of the floats, such as found in Italy, and if the North-European mosquito with dark barred eggs and usually strongly striated floats had got another name.

In order to prevent confusion, however, we accept the nomenclature proposed by the Committee of Experts. In connection with what is said under *A* on the spread of *messeae* and of *melanoon*, it is clear that future research must demonstrate if our presumption is right that the North-European *messeae* is not found in South Italy.

If a certain compromise is made between the nomenclature from a consequent morphological and from a consequent physiological point of view, then we believe that the following nomenclature is most desired:

1. *Anopheles maculipennis typicus* Martini, Missiroli and Hackett, 1931.
2. " " *messeae* Falleroni 1926.
3. " " *melanoon* Hackett 1934.
4. " " *labranchiae* Falleroni 1926.
5. " " *atroparvus* van Thiel 1927.
6. " " *elutus* Edwards 1921.

In this nomenclature the geobiototype-circle is not expressed, the morphological species name is maintained and the name of the (geo)biotype is mentioned. The term "variety" is omitted, as is done more and more in systematics ("the term variety which is often used in connection with mosquitoes is so ill-defined that it has not been adopted"; GATER, 1934).

Summary.

1. *Anopheles maculipennis* MEIGEN is not one "Rassenkreis" (HACKETT), but is composed of two circles (geobiototype-circles), each comprising a few (geo)biotypes, and of one biotype which stands apart. The distinction of these circles is of importance for the insight in the spread of the biotypes and in the sexual affinity with respect to one another.

2. Some remarks are made on the spread and the nomenclature of the different biotypes (= varieties, Committee of Experts, League of Nations).

Leyden, August 1935.

REFERENCES.

- DE BUCK, A., SCHOUTE, E and SWELLENGREBEL, N. H., Crossbreeding experiments with Dutch and foreign races of *Anopheles maculipennis*, Riv. di Malariol. 13, 1934, N^o. 3.

- CHRISTOPHERS, R., c.s., Courte instruction pour la détermination des variétés d'*Anopheles maculipennis*. Bull. Trimestr. Org. d'Hyg. Soc. d. Nations III, 1935, N^o. 20.
- COLLIER, W. A., Allgemeine Methoden des zoologisch systematischen Arbeitens; die Nomenklatur. Handb. d. Biol. Arbeitsmethoden, 9, 1924, T. 1, H. 4, Lief. 144, p. 590.
- CORRADETTI, A., Recherche sugli incroci tra le varietà di *Anopheles maculipennis*. Riv. di Malariol. 13, 1934, p. 707.
- DIEMER, J. H., Over biotypen van *Anopheles maculipennis* Meigen, in het bijzonder in Westelijk Nederland, een taxonomisch onderzoek. Thesis, Leiden 1935.
- DIEMER, J. H. and VAN THIEL, P. H., Investigations on the racial purity of *Anopheles maculipennis atroparvus* and messeae in the Netherlands. To be published in the Acta Leidensia X.
- FALLERONI, D., Fauna anofelica italiana e suo habitat. Riv. di Malariol. 5, 1926, fasc. 5—6.
- Zooprofilassi e sua applicazione in Ardea, Roma, 1932.
- GATER, B. A. R., Aids to the identification of Anopheline larvae in Malaya, Singapore, 1934.
- HACKETT, L. W., The present status of our knowledge of the subspecies of *Anopheles maculipennis*. Transact. Roy. Soc. Trop. Med. and Hyg. 28, 1934, p. 109.
- MARTINI, E., MISSIROLI, A. and HACKETT, L. W., Versuche zum Rassenproblem des *Anopheles maculipennis*. Arch. f. Sch. u. Tropenhyg. 35, 1931, p. 622.
- MISSIROLI, A., HACKETT, L. W. e MARTINI, E., Le razze di *Anopheles maculipennis* e la loro importanza nella distribuzione della malaria in alcune regioni d'Europa. Riv. di Malariol. 12, 1933, N^o. 1.
- ROUBAUD, E., Un type racial nouveau de l'*Anopheles maculipennis*. Bull. Soc. Path. Exot. 27, 1934, p. 737.
- Variété nouvelle de l'*Anopheles maculipennis* au Maroc. Bull. Soc. Path. Exot. 28, 1935, p. 107.
- VAN THIEL, P. H., Sur l'origine des variations de taille de l'*Anopheles maculipennis*. Bull. Soc. Path. Exot. 20, 1927, p. 366.
- Investigations on the range and differentiation of *Anopheles maculipennis* races and their bearing on the existence or the absence of malaria in Italy. Riv. di Malariol. 12, 1933, N^o. 2.
- Insuffisance des caractères de l'oeuf pour la distinction des races tropiques et biologiques de l'*Anopheles maculipennis* ? Bull. Soc. Path. Exot. 27, 1934, p. 154.

Mathematics. — *Beiträge zur Topologie der Deformationen. III. Klassen und Homologietypen von Abbildungen*¹⁾. Von Dr. W. HUREWICZ. (Communicated by Prof. L. E. J. BROUWER).

(Communicated at the meeting of December 21, 1935).

Die Ergebnisse der vorigen Mitteilung bilden eine Grundlage für weitere Untersuchungen über die Beziehungen zwischen den Homologie- und den Homotopieeigenschaften von Räumen und Abbildungen.

Die stetigen Abbildungen eines Raumes X in einen anderen Raum Y

¹⁾ Die ersten zwei Noten dieser Serie (im Folgenden als DI und DII zitiert) finden sich in diesen Proceedings 38, S. 112 u. 521. Ausführliche Darstellung erscheint später in den Ann. of Math.

lassen sich, wie dies besonders von H. HOPF hervorgehoben wurde, nach zwei grundsätzlich verschiedenen Gesichtspunkten klassifizieren: Erstens hat man die Einteilung der Abbildungen in die BROUWERSchen Klassen von einander homotopen Abbildungen und zweitens die Einteilung nach den Homologietypen²⁾ (vgl. die Definition unten). Abbildungen derselben Klasse haben immer denselben Homologietypus. Die umgekehrte Aussage ist nur in gewissen Fällen richtig, z.B. in dem von HOPF untersuchten Fall der Abbildungen eines n -dimensionalen Polyeders in die n -dimensionale Sphäre S_n ³⁾. Einen anderen Fall dieser Art haben wir in der vorigen Mitteilung kennen gelernt. Wir betrachteten dort lokal zusammenziehbare Räume Y , deren Homotopiegruppen bis zu einem bestimmten Index $n-1$ ($n \geq 2$) leer sind, und haben gezeigt, dass unter dieser Voraussetzung die n -te Homotopiegruppe $\pi_n(Y)$ mit der n -ten Homologiegruppe $\beta_n(Y)$ übereinstimmt⁴⁾. (Diesen grundlegenden Satz werden wir im folgenden kurz als *Aequivalenzsatz* bezeichnen). In anderer Formulierung besagt diese Behauptung, dass für die Abbildungen der S_n in Y , analog wie im HOPFschen Fall, die Einteilung in Klassen mit der Einteilung nach den Homologietypen übereinstimmt⁵⁾.

Wir werden sehen, dass es sich in den beiden erwähnten Fällen um Spezialaussagen eines viel allgemeineren Theorems handelt. Der Formulierung dieses Theorems schicken wir einige vorbereitende Betrachtungen über Homologietypen der Abbildungen voraus.

1. Sei X ein topologischer kompakter Raum und \mathfrak{A} eine abelsche Gruppe^{5a)}. Mit $\beta_n(X, \mathfrak{A})$ bezeichnen wir die in bekannter Weise definierte n -dimensionale Homologiegruppe von X in bezug auf \mathfrak{A} als Koeffizientenbereich⁶⁾. Die folgenden Gruppen werden am meisten als Koeffizientenbereiche verwendet: die additive Gruppe \mathfrak{Z}_0 der ganzen Zahlen, die additive Gruppe \mathfrak{Z}_m der ganzzahligen Restklassen modulo m ($m = 2, 3, \dots$) und schliesslich die Gruppe \mathfrak{R}_1 der Kreisdrehungen (die additive Gruppe der Restklassen reeller Zahlen modulo 1).

²⁾ HOPF spricht von „algebraischen Typus“. Vgl. Comm. Math. Helv. 4, S. 39. Letzten Endes geht dieser Begriff auf den des BROUWERSchen Abbildungsgrades zurück.

³⁾ Vgl. H. HOPF, a.a.O. Das HOPFsche Ergebnis war bisher das allgemeinste Resultat in dieser Richtung, und es wurde von HOPF sogar bezweifelt, ob eine wesentliche Verallgemeinerung möglich ist. Vgl. die eben zitierte Abhandlung, S. 43.

⁴⁾ Vgl. DII, Satz I. Bemerken wir, dass der Satz und der Beweis seine Gültigkeit behält, wenn man die Voraussetzung, Y sei lokal zusammenziehbar, durch die schwächere Annahme ersetzt, Y sei lokal zusammenhängend bis zur Ordnung n im LEFSCHETZschen Sinn (dies bedeutet, dass es zu jedem Punkt p von Y und zu jeder Umgebung U von p eine Umgebung V von p gibt, so dass jedes in V liegende stetige Bild der m -Sphäre ($m = 0, 1, \dots, n$) zusammenziehbar ist in U (vgl. S. LEFSCHETZ, Ann. of Math. 35, S. 119).

⁵⁾ Genauer: Die Klasse einer Abbildung $f: Y \rightarrow S_n$ wird durch den von f bewirkten Homomorphismus der Gruppe $\beta_n(S_n)$ in die Gruppe $\beta_n(Y)$ bestimmt, und es entspricht umgekehrt jedem Homomorphismus von $\beta_n(S_n)$ in $\beta_n(Y)$ eine stetige Abbildung von S_n in Y , die diesen Homomorphismus bewirkt.

Statt $\beta_n(X, \mathfrak{Z}_0)$ schreiben wir wie bisher $\beta_n(X)$. Betrachten wir mit VIETORIS ^{6a)} $\beta_n(X)$ als eine topologische Gruppe. Diejenigen ihrer Elemente c , deren Vielfache $m \cdot c$ (wo m ganzzahlig und $\neq 0$) in jeder Umgebung der Null vorkommen, bilden eine Untergruppe von $\beta_n(X)$; sie heisst die n -te Torsionsgruppe von X ⁷⁾ und wird im folgenden mit $\tau_n(X)$ bezeichnet. $\tau_n(X)$ enthält insbesondere alle Elemente endlicher Ordnung von $\beta_n(X)$. Falls X n -dimensional ist, besteht $\tau_n(X)$, wie man leicht zeigt, nur aus der Null.

Sei Y ein zweiter kompakter Raum. Jede stetige Abbildung f von X in Y bewirkt eine homomorphe Abbildung der Gruppe $\beta_n(X, \mathfrak{U})$ in die Gruppe $\beta_n(Y, \mathfrak{U})$; die letztere Abbildung bezeichnen wir mit H_f^n, \mathfrak{U} .

Definition. Die Abbildungen f und g ($f \in Y^X$, $g \in Y^X$) haben denselben Homologietypus in der Dimension n , wenn für jede abelsche Gruppe \mathfrak{U} die Homomorphismen H_f^n, \mathfrak{U} und H_g^n, \mathfrak{U} übereinstimmen.

Satz 1.1. Für je zwei Abbildungen f und g aus Y^X sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) f und g haben denselben Homologietypus in der Dimension n .
- (b) Die Homomorphismen H_f^n, \mathfrak{R}_1 , H_f^n, \mathfrak{Z}_m ($m=0, 2, 3, \dots$) stimmen mit den entsprechenden Homomorphismen H_g^n, \mathfrak{R}_1 , H_g^n, \mathfrak{Z}_m überein.
- (c) Zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zahl $\eta > 0$ mit der folgenden Eigenschaft:

Ist C ein in X liegender n -dimensionaler η -Zykel modulo m ($m=0, 2, 3, \dots$), so sind die Bildzykeln $f(C)$ und $g(C)$ in Y ε -homolog (modulo m).⁸⁾

Der Schluss (a) \rightarrow (b) ist trivial. Die Implikationen (b) \rightarrow (c) und (c) \rightarrow (a) sind leicht zu beweisen.

Bei der ersteren handelt es sich um die im wesentlichen bekannte Beziehung zwischen den Homologien nach variablem ganzzahligem Modul und nach dem Modul 1^{8a)}. Zum Beweis der letzteren genügt es zu zeigen, dass die Aussage (c) mit demselben η richtig bleibt, wenn man unter C einen η -Zykel in bezug auf irgendwelche abelsche Gruppe \mathfrak{U} als Koeffizientenbereich versteht. Nun erzeugen die Koeffizienten, die in C wirklich auftreten, eine Untergruppe von \mathfrak{U} , die als abelsche Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden direkte Summe ist von endlich vielen zyklischen Gruppen. Seien a_i ($i=1, 2, \dots, N$) die Erzeugenden dieser zyklischen Gruppen und m_i ihre Ordnungen (falls a_i von unendlicher Ordnung ist, setzen wir $m_i=0$); dann ist C in der Form darstellbar $C = \sum a_i C_i$, wo

^{5a)} Für abelsche Gruppen wird im folgenden überall additive Schreibweise verwendet.

⁶⁾ Vgl. PONTRJAGIN, Ann. of Math. **35**, S. 908. Vgl. auch ALEXANDROFF, Fund. Math. **20**, S. 140.

^{6a)} Vgl. VIETORIS, Math. Ann. **97**, S. 457.

⁷⁾ Nach J. W. ALEXANDER, Ann. of Math. **33**, S. 555.

⁸⁾ Wegen der ε -Zykeln usw. vgl. etwa ALEXANDROFF, Math. Ann. **106**, S. 174. Die Eigenschaft (c) kan auch durch das Verhalten der wahren Zykeln von ALEXANDROFF formuliert werden (vgl. a.a.O.).

^{8a)} Vgl. ALEXANDROFF, Fund. Math. **20**, S. 143.

C_i ganzzahlige Zykeln modulo m_i sind. Aus der vorausgesetzten ε -Homologie zwischen den Zykeln $f(C_i)$ und $g(C_i)$ folgt schliesslich, dass $f(C)$ mit $g(C)$ ε -homolog ist.

Laut Satz 1.1 wird der Homologietypus der Abbildung f in der Dimension n durch die Homomorphismen $H_{f, \mathfrak{N}_1}^n, H_{f, \mathfrak{Z}_m}^n$ bestimmt ($m = 0, 2, \dots$). In einem wichtigen Fall reicht bereits der erste dieser Homomorphismen aus:

Satz 1.2. *Falls die Torsionsgruppe $\tau_n(Y)$ leer ist (insbesondere also, falls $\dim Y = n$ gilt), werden die Homologietypen der Abbildungen $f \in Y^X$ in der Dimension n bereits durch die Homomorphismen H_{f, \mathfrak{N}_1}^n bestimmt.*

Zum Beweise braucht man nur zu zeigen, dass aus der Uebereinstimmung der Homomorphismen $H_{f, \mathfrak{N}_1}^n, H_{g, \mathfrak{N}_1}^n$ die Aussage (c) des Satzes 1.1 folgt.

Betrachten wir noch etwas näher den Fall, wo X ein *Polyeder* ist.

Satz 1.3. *Wenn X ein Polyeder ist (und Y beliebig), wird der n -dimensionale Homologietypus einer Abbildung $f \in Y^X$ durch die Homomorphismen H_{f, \mathfrak{Z}_m}^n ($m = 0, 2, \dots$) bestimmt. Ist überdies die Gruppe $\tau_{n-1}(X)$ leer, so reicht bereits der Homomorphismus H_{f, \mathfrak{Z}_0}^n zur Bestimmung des Homologietypus aus.*

Wenn zwei Abbildungen in jeder Dimension denselben Homologietypus besitzen, so sagen wir, sie haben schlechthin *den gleichen Homologietypus*.

Abbildungen aus derselben Klasse haben immer den gleichen Homologietypus.

2. Das Hauptergebnis dieser Arbeit ist:

Theorem I. *Sei X ein n -dimensionaler kompakter Raum (n endlich und ≥ 2) und Y ein kompakter Raum^{8b)} (von beliebiger Dimension) mit den folgenden Eigenschaften: a) Y ist lokal zusammenhängend bis zur Ordnung n (einschliesslich) im LEFSCHETZ'schen Sinne⁹⁾. b) Die Fundamentalgruppe $\pi_1(Y)$, sowie die Homologiegruppen $\beta_i(Y)$ für $i = 0, 1, \dots, n-1$ sind leer¹⁰⁾. Behauptung: Die Klassen der Abbildungen $f \in Y^X$ sind durch ihre Homologietypen^{10a)} bestimmt.*

^{8b)} Die Voraussetzung, Y sei kompakt, könnte bei geeigneter Fassung des Begriffs des Homologietypus entbehrt werden.

⁹⁾ Vgl. Fussnote 4). Wegen der Beziehung der LEFSCHETZ'schen Definition zur ALEXANDROFF-ČECH'schen Definition des lokalen Zusammenhanges, die auf dem Homologiebegriff beruht, vgl. HUREWICZ, Fund. Math. **25**, S. 467.

¹⁰⁾ Setzt man Y als zusammenhängend voraus, so ist die Bedingung b) nach dem Äquivalenzsatz mit dem Verschwinden der ersten $n-1$ Homotopiegruppen von Y gleichbedeutend.

^{10a)} Die Homologietypen fallen hier natürlich mit den Homologietypen in der Dimension n zusammen (die Gruppen $\beta_i(Y, \mathfrak{A})$, verschwinden nämlich für $i < n$ bei beliebig gewähltem Koeffizientenbereich).

Nehmen wir für X die n -Sphäre S_n , so geht das Theorem I in einen Teil des oben erwähnten Äquivalenzsatzes über. Nehmen wir für Y die S_n und für X ein beliebiges n -dimensionales Polyeder, so erhalten wir den oben gleichfalls erwähnten HOPFSchen Satz.

Zum Beweis des Theorems I setzen wir zunächst voraus, X sei ein Polyeder (laut Satz 1.3 behauptet das Theorem in diesem Fall, dass die Abbildungsklassen durch die Homomorphismen H_{f, \mathfrak{S}_m}^n ($m=0, 2, 3, \dots$) bestimmt sind). Wörtlich wie bei HOPF¹¹⁾ führen wir die Behauptung auf den folgenden *Erweiterungssatz* zurück:

Satz 2.1. *Sei P ein $(n+1)$ -dimensionales Polyeder, Q ein Teilpolyeder von P (von derselben oder kleinerer Dimension). Der Raum Y genüge den Voraussetzungen des Theorems I. Falls die Abbildung $f \in Y^Q$ jedem Zykel modulo m ($m=0, 2, 3, \dots$) von Q , der in P homolog Null ist, das Element Null der Gruppe $\beta_n(Y, \mathfrak{S}_m)$ zuordnet, so lässt sich f zu einer Abbildung $F \in Y^P$ erweitern.*

3. Den Beweis von 2.1 führen wir ähnlich wie im HOPFSchen Fall ($Y=S_n$); dabei wird wesentlich der Äquivalenzsatz^{11a)} benutzt, der hier ungefähr dieselbe Rolle spielt, wie bei HOPF die Beziehung zwischen den Abbildungsklassen und den Abbildungsgraden im Fall der Abbildungen der Sphäre auf sich selbst.

Sei Q_{n-1} das $(n-1)$ -dimensionale Gerüst von Q (das Polyeder, gebildet von den n -dimensionalen Simplexes von Q). y_0 sei ein fester Punkt von Y . Die Abbildung f lässt sich stetig deformieren in eine Abbildung f' mit $f'(Q_{n-1})=y_0$ (Vgl. D II, S. 526). Da die Erweiterbarkeit einer Abbildung bei stetiger Deformation nicht verloren geht^{11b)}, dürfen wir von vorneherein annehmen $f(Q_{n-1})=y_0$.

Jedem orientierten n -dimensionalen Simplex T von Q ist vermöge f ein bestimmtes Element von $\beta_n(Y)$ zugeordnet, nämlich das Bild des Grunzykels der aus T durch Identifizierung der Randpunkte entstehenden Sphäre. Dieses Element bezeichnen wir mit $\varphi(T)$ und ordnen jedem Komplex $K=\sum e_i T_i$ (wo e_i ganze Zahlen und T_i n -dimensionale Simplexes von Q sind) das Element

$$(') \quad \varphi(K) = \sum e_i \varphi(T_i)$$

zu. Bezeichnen wir mit \mathfrak{L} die abelsche Gruppe der (reinen) n -dimensionalen Komplexe von P (gemeint sind Komplexe mit ganzzahligen Koeffizienten). Die n -dimensionalen Komplexe von Q bilden eine Untergruppe \mathfrak{L}' von \mathfrak{L} . Sei schliesslich \mathfrak{L}'' die Untergruppe von \mathfrak{L} , bestehend aus den in P nullhomologen Zykeln (Modulo 0).

¹¹⁾ Vgl. a.a.O., S. 43–44.

^{11a)} Nach der Fussnote¹⁰⁾ genügt Y den Voraussetzungen des Äquivalenzsatzes.

^{11b)} Vgl. D II, S. 525.

Die Formel (') definiert einen *Homomorphismus* von \mathfrak{L}' in $\beta_n(Y)$. Die Voraussetzung des Satzes 2.1 lässt sich so formulieren: Falls der Komplex $K \in \mathfrak{L}'$ homolog Null ist modulo m in P ($m=0, 2, \dots$), d.h., falls eine Relation

$$K = K_1 + m K_2 \quad (K_1 \in \mathfrak{L}'', \quad K_2 \in \mathfrak{L})$$

besteht, gilt

$$('') \quad \varphi(K) \equiv 0 \pmod{m}$$

(damit ist gemeint, dass $\varphi(K)$ das m -fache eines Elements von $\beta_n(Y)$ ist). Daraus schliessen wir ähnlich wie bei HOPF, dass der *Homomorphismus* φ sich zu einem *Homomorphismus* Φ von \mathfrak{L} in $\beta_n(Y)$ erweitern lässt, und zwar so, dass für $K \in \mathfrak{L}''$

$$('') \quad \Phi(K) = 0$$

gelte.

Man stützt sich dabei auf den folgenden leicht beweisbaren algebraischen Satz: Sei \mathfrak{L} ein endlicher Modul (d.h. eine abelsche Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden und ohne Elemente endlicher Ordnung). \mathfrak{L}' und \mathfrak{L}'' seien Untermoduln von \mathfrak{L} , und \mathfrak{A} sei eine beliebige abelsche Gruppe, (in unserem Fall ist dies die Gruppe $\beta_n(Y)$). Ist dann φ ein Homomorphismus von \mathfrak{L}' in \mathfrak{A} , bei dem jedes Element $c \in \mathfrak{L}'$ von der Gestalt

$$c = c_1 + m c_2 \quad (c_1 \in \mathfrak{L}'', \quad c_2 \in \mathfrak{L})$$

in das m -fache eines Elements von \mathfrak{A} übergeht, so lässt sich φ zu einem Homomorphismus Φ von \mathfrak{L} in \mathfrak{A} erweitern, bei dem der ganze Modul \mathfrak{L}'' auf die Null abgebildet wird.

Die Relation (') gilt insbesondere, wenn K der Rand ist eines $(n+1)$ -dimensionalen Simplexes von P .

Jedes nicht in Q vorkommende n -dimensionale Simplex T (das wir uns mit einer bestimmten Orientierung versehen denken) bilden wir jetzt stetig in Y ab, so dass der Rand von T in den Punkt y_0 übergeht und der Grundzykel der aus T durch Identifizierung der Randpunkte hervorgehenden n -Sphäre auf das Element $\Phi(T)$ von $\beta_n(Y)$ abgebildet wird. Die Existenz einer derartigen Abbildung steht nach dem Aequivalenzsatz fest.

Auf diese Weise wird die Abbildung f auf das n -dimensionale Gerüst von P erweitert. Sie lässt jedem n -dimensionalen Zykel C das Element $\Phi(C)$ von $\beta_n(Y)$ entsprechen. Dem Randzykel R eines $(n+1)$ -dimensionalen Simplexes U wird also das Element Null zugeordnet; hieraus folgt aber nach dem Aequivalenzsatz, dass die Sphäre R *nullhomotop* abgebildet wird, d.h. die Abbildung lässt sich auf das ganze Simplex U erweitern. Damit ist die Fortsetzbarkeit von f auf P bewiesen, und somit auch das Theorem I für den Fall, dass X ein Polyeder ist.

4. Der Beweis unter allgemeinen Voraussetzungen erfolgt durch Zurückführung auf den eben behandelten Spezialfall. Sei $\{\varepsilon_\nu\}$ eine gegen 0 konvergierende Folge positiver Zahlen. Unter Anwendung des ALEXANDROFFSchen Ueberführungssatzes¹²⁾ bestimmen wir für $\nu=1, 2, \dots$ ein n -dimensionales Polyeder P_ν das aus dem Raum X durch eine ε_ν -Transformation¹³⁾, (d.h. eine Transformation, die je zwei Punkte mit Abstand $> \varepsilon_\nu$ auf verschiedene Punkte abbildet) φ_ν hervorgeht. Wir dürfen ohne weiteres annehmen, die Kantenlängen der Simplizes von P seien $< 1/n$. Sei jetzt $f \in Y^X$ beliebig gegeben. Für $\nu=1, 2, \dots$ definieren wir in der folgenden Weise eine Abbildung $f_\nu \in Y^{P_\nu}$: Ist p ein Eckpunkt von P , so setzen wir $f_\nu(p) = f(x)$, wo x einer der Punkte ist mit $\varphi_\nu(x) = p$. Die so für die Menge der Eckpunkte von P_ν definierte Abbildung erweitern wir nachträglich auf das ganze Polyeder P_ν , wobei wir dafür sorgen, dass die Durchmesser der Bilder der Simplizes von P_ν mit wachsendem ν gleichmässig gegen Null konvergieren. Dass man die letzte Bedingung tatsächlich realisieren kann, ist eine leichte Folgerung aus dem lokalen Zusammenhang von Y in den Dimensionen $0, 1, \dots, n-1$.

Sei g eine zweite Abbildung aus Y^X . Wir wenden auf g dasselbe Verfahren wie soeben auf f und erhalten Abbildungen $g_\nu \in Y^{P_\nu}$. Haben nun f und g denselben Homologietypus, so haben, wie man leicht zeigen kann, für hinreichend grosses ν auch die Abbildungen f_ν und g_ν denselben Homologietypus (sonst könnte nämlich die Bedingung (c) des Satzes 1.1 für die Abbildungen f und g nicht erfüllt sein), sind also nach dem eben bewiesenen Spezialfall des Theorems I einander homotop. Dann sind offenbar auch die Abbildungen

$$f'_\nu(x) = f_\nu(\varphi_\nu(x)) \quad , \quad g'_\nu(x) = g_\nu(\varphi_\nu(x)) \quad (x \in X)$$

einander homotop. Nun sieht man leicht, dass die Abbildungen f'_ν bzw. g'_ν gleichmässig gegen f bzw. g konvergieren. Unter Berücksichtigung des lokalen Zusammenhanges von Y ergibt sich hieraus nach einem Satz von KURATOWSKI¹⁴⁾, dass für genügend grosses ν f'_ν derselben Klasse angehört wie f und g'_ν derselben Klasse wie g . Damit ist aber nach dem Vorangehenden gezeigt, dass f und g in dieselbe Klasse gehören.

¹²⁾ Vgl. ALEXANDROFF, Ann. of Math. **30**, S. 20. Einfachere Beweise; KURATOWSKI, Fund. Math. **20**, S. 191, HUREWICZ, Sitzungsberichte d. Preuss. Ak. **24**, S. 759, Fussnote ¹⁾ (die beiden zuletzt zitierten Beweise sind identisch).

¹³⁾ Die von ALEXANDROFF (vgl. a.a.O., S. 103) eingeführten ε -Abbildungen (und die damit eng zusammenhängenden ε -Verschiebungen) spielen eine überaus wichtige Rolle in den topologischen Untersuchungen der letzten Zeit (vgl. etwa meinen Beweis des MENGER-NÖBELINGschen Einbettungssatzes in der eben zitierten Arbeit, der sich wesentlich auf den Begriff der ε -Abbildung stützt).

¹⁴⁾ Der KURATOWSKISCHE Satz behauptet, dass der Raum Y^X durch Bögen lokal zusammenhängend ist, wenn Y bis zur Ordnung n lokal zusammenhängend ist und X einen beliebigen höchstens n -dimensionalen kompakten Raum bedeutet. Vgl. Fund. Math. **20**, S. 285.

5. Ein besonders interessanter Fall liegt vor, wenn die Torsionsgruppe $\tau_n(Y)$ leer ist. Nach Satz 1.2 ist in diesem Fall der Homologietypus einer Abbildung $f \in Y^X$ also nach Theorem I auch ihre Abbildungsklasse durch den Homomorphismus H_{f, \mathfrak{R}_1}^n bestimmt. Betrachtet man die Gruppen $\beta_n(X, \mathfrak{R}_1)$, $\beta_n(Y, \mathfrak{R}_1)$ als *topologische* Gruppen^{14a)}, so sind die Homomorphismen H_{f, \mathfrak{R}_1}^n stetig. Umgekehrt, kann mit den oben angewendeten Methoden gezeigt werden, dass man jeden stetigen Homomorphismus von $\beta_n(X, \mathfrak{R}_1)$ in $\beta_n(Y, \mathfrak{R}_1)$ durch eine Abbildung $f \in Y^X$ realisieren kann (dies gilt unabhängig von der Voraussetzung, dass $\tau_n(Y)$ leer ist, sogar für $\dim X = n + 1$). Man hat also

Theorem II. *Sind die Voraussetzungen des Theorems I erfüllt, und ist ausserdem Y torsionsfrei in der n -ten Dimension, so gehört zu jedem stetigen Homomorphismus der Gruppe $\beta_n(X, \mathfrak{R}_1)$ in die Gruppe $\beta_n(Y, \mathfrak{R}_1)$ genau eine Abbildungsklasse von X in Y .*

Ein ähnlicher (nur etwas komplizierterer) Satz gilt unter allgemeinen Voraussetzungen des Theorems I. Zur Aufzählung der Abbildungsklassen muss man dann ausser dem Homomorphismus H_{f, \mathfrak{R}_1}^n noch gewisse Homomorphismen der Gruppen $\beta_n(X, \mathfrak{B}_m)$ (für endlich viele Werte von m) in zyklische Untergruppen von $\tau_n(Y)$ heranziehen.

Nehmen wir jetzt an, die Gruppe $\beta_n(Y)$ sei *zyklisch* von unendlicher Ordnung, dann ist $\beta_n(Y, \mathfrak{R}_1)$ mit \mathfrak{R}_1 stetig isomorph. Die stetigen Homomorphismen von $\beta_n(X, \mathfrak{R}_1)$ in \mathfrak{R}_1 sind die sogenannten *Charaktere* von $\beta_n(X, \mathfrak{R}_1)$ ¹⁵⁾. Diese Charaktere sind nach Theorem II ein-eindeutig den Abbildungsklassen zugeordnet. Wenden wir dies auf den Fall $Y = S_n$ an:

Theorem III. *Ist X ein kompakter n -dimensionaler Raum, so entspricht jedem Charakter der Gruppe $\beta_n(X, \mathfrak{R}_1)$ eine und nur eine Abbildungsklasse von X in die n -Sphäre.*

In der Terminologie von FREUDENTHAL^{15a)} bedeutet dies, dass die "HOPFsche Gruppe" von X zur Gruppe $\beta_n(X, \mathfrak{R}_1)$ *dual*¹⁶⁾ ist.

6. Geht ein Element $c \in \beta_n(X, \mathfrak{R}_1)$ bei dem durch die Abbildung $f \in Y^X$ verursachten Homomorphismus H_{f, \mathfrak{R}_1}^n in die Null über, so sagen wir c werde durch f *nullhomolog* abgebildet. Sei X eine Teilmenge von Y . Die Elemente von $\beta_n(X, \mathfrak{R}_1)$, die bei der *identischen* Abbildung nullhomolog abgebildet werden, nennen wir kurz *nullhomolog in Y* (dies sind also Elemente, die durch in Y nullhomologe Vollzykeln dargestellt

^{14a)} Vgl. PONTRJAGIN, Ann. of Math. **35**, S. 909.

¹⁵⁾ Vgl. PONTRJAGIN, Ann. of Math. **35**, S. 369.

^{15a)} Vgl. FREUDENTHAL, Comp. Math. **2**, S. 134.

¹⁶⁾ Vgl. PONTRJAGIN a.a.O.

werden). Anknüpfend an den Satz 2.1, kann man den folgenden *Erweiterungssatz* beweisen:

Satz 6.1. *Sei X ein kompakter höchstens $(n+1)$ -dimensionaler Raum, M eine abgeschlossene Teilmenge von X und Y ein den Voraussetzungen des Theorems I genügender Raum. Damit eine Abbildung $f \in Y^M$ sich zu einer Abbildung $F \in Y^X$ erweitern lasse, ist notwendig und hinreichend, dass die in X nullhomologen Elemente der Gruppen $\beta_n(M, \mathbb{R}_1)$, $\beta_n(M, \mathbb{Z}_m)$ ($m = 0, 2, 3, \dots$) durch f nullhomolog abgebildet werden.*

Falls Y torsionsfrei in der n -ten Dimension ist, braucht man nur die Gruppe $\beta_n(M, \mathbb{R}_1)$ zu berücksichtigen. Eine Folgerung aus Satz 6.1: Wenn kein von Null verschiedenes Element von $\beta_n(M, \mathbb{R}_1)$ in X nullhomolog ist (und nur in diesem Falle) lässt sich jede Abbildung $f \in S_n^M$ auf X erweitern. Daraus gewinnt man sehr leicht die bekannte ALEXANDROFF-PONTRJAGINSche¹⁷⁾ Charakterisierung der Dimensionszahl eines kompakten Raumes X mit Hilfe der Zykeln modulo 1.

7. Bisjetzt beschäftigten wir uns mit der Klassifizierung der Abbildungen. Jetzt wollen wir *Räume* nach ihren Homotopieeigenschaften einteilen. Wir beschränken uns auf kompakte Räume.

Definition. Von zwei kompakten Räumen X und Y sagen wir, sie haben *denselben Homotopietypus*, wenn es eine Abbildung $f \in Y^X$ und eine Abbildung $\varphi \in X^Y$ gibt, so dass die zusammengesetzten Abbildungen $f \cdot \varphi$ und $\varphi \cdot f$ den *identischen* Abbildungen (von X in X , bzw. von Y in Y) homotop sind.

Man sieht leicht: Wenn X denselben Homotopietypus hat wie Y und Y denselben Homotopietypus wie Z , so haben auch X und Z denselben Homotopietypus. Es liegt also wirklich eine Klasseneinteilung der kompakten Räume vor. Alle zusammenziehbaren Räume haben denselben Homotopietypus, so dass also Räume von verschiedenen Dimensionen denselben Homotopietypus haben können.

Räume vom gleichen Homotopietypus haben isomorphe Homologiegruppen (bei jeder Wahl des Koeffizientenbereiches) und isomorphe Homotopiegruppen. Umgekehrt, kann man in manchen Fällen aus der Isomorphie der Homologiegruppen auf die Gleichheit der Homotopietypen schliessen.

Betrachten wir beispielweise zwei n -dimensionale (n endlich und ≥ 2) kompakte lokal zusammenziehbare Räume Y und Y' , deren Fundamentalgruppen und Homologiegruppen bis auf die n -te verschwinden. Aus dem Theorem I folgt leicht: *Damit Y und Y' denselben Homotopietypus haben, ist notwendig und hinreichend, dass die Gruppen $\beta_n(Y)$ und $\beta_n(Y')$ isomorph seien.*

Es erhebt sich die Frage: Unter welchen Voraussetzungen lässt sich

¹⁷⁾ Vgl. die sub ^{8a)} zitierte Arbeit.

aus der Gleichheit des Homotopietypen die Uebereinstimmung der topologischen Typen folgern. Beispielweise: Sind zwei *geschlossene Mannigfaltigkeiten* vom gleichen Homotopietypus immer homöomorph? Aus der positiven Beantwortung der letzten Frage würde sich sofort die *Richtigkeit der POINCARÉschen Vermutung*¹⁸⁾ ergeben, denn nach dem obigen hat eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit deren Fundamentalgruppe und Homologiegruppen bis auf die letzte leer sind, den Homotopietypus der n -Sphäre.

¹⁸⁾ Vgl. D II S. 523.

Mathematics. — *Electromagnetism, independent of metrical geometry.*

5. *Quantum-theoretical commutability-relations for light-waves.*

By D. VAN DANTZIG. (Communicated by Prof. J. A. SCHOUTEN).

(Communicated at the meeting of December 21, 1935).

§ 1. *Introduction.*

In some previous papers¹⁾ MAXWELL's equations were brought into the form:

$$I \quad \partial_j \mathfrak{S}^{ij} = \mathfrak{S}^i; \quad II \quad 2 \partial_{[j} \varphi_{i]} = F_{ji}; \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

whereas between the quantities \mathfrak{S}^i (current and charge), φ_i (potentials), F_{ij} (fieldbivector, composed of **E** and **B**), \mathfrak{S}^{ij} (composed of **H** and **D**) exist the "linking equations" (Cf. ⁷⁾)

$$I \quad \varphi_i = \int \gamma_{ik'} \mathfrak{S}^{k'} d\Sigma'; \quad II \quad \mathfrak{S}^{ij} = \frac{1}{2} \int \Gamma^{ijk'l'} F_{k'l'} d\Sigma' \quad . \quad (2)$$

(where $d\Sigma'$ is the four-dimensional volume-element), solved by

$$I \quad \mathfrak{S}^i = \int \Gamma^{ik'} \varphi_{k'} d\Sigma'; \quad II \quad F_{ij} = \int \frac{1}{2} \gamma_{ijk'l'} \mathfrak{S}^{k'l'} d\Sigma' \quad . \quad (3)$$

with

$$I \quad \Gamma^{ik'} = \partial_j \partial_{l'} \Gamma^{ijk'l'}; \quad II \quad \gamma_{ijk'l'} = 4 \partial_{[i} \partial_{[k'} \gamma_{j]l']} \quad . \quad . \quad (4)$$

It is the purpose of this paper to show that also the fundamental equations of *quantum-electrodynamics*, viz. the commutability-relations for light-waves, can be brought into our scheme. These relations, which were studied by DIRAC²⁾, JORDAN and PAULI³⁾, HEISENBERG and PAULI⁴⁾,

¹⁾ The preceding papers under the same main-title appeared in these proceedings, viz. I The foundations, 37 (1934) 521—525; II Variational principles and further generalisation of the theory, ibidem 526—531; III Mass and motion, ibidem 643—652; IV Momentum and energy; waves, ibidem 825—836. They are quoted here as I, II, III, IV.

²⁾ P. A. M. DIRAC, Proc. Royal Soc. **114** (1927) 243, 710; **136** (1932) 433.

³⁾ P. JORDAN und W. PAULI, Zur Quantenelektrodynamik ladungsfreier Felder, ZS. f. Ph. **47** (1928) 151—173.

⁴⁾ W. HEISENBERG und W. PAULI, Zur Quantendynamik der Wellenfelder, ZS. f. Ph. **56** (1929) 1—61; **59** (1930) 168—190. Cf. also L. ROSENFELD, ibidem **76** (1932) 729—734.

BOHR and ROSENFELD⁵⁾, FOCK⁶⁾ and several other authors, take in our theory the simplest conceivable form, viz.⁷⁾

$$[\varphi_i, \varphi_{j'}] = \frac{hc}{i} (\gamma_{ij'} - \gamma_{j'i}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

from which the relations for the field-bivector

$$[F_{ij}, F_{k'l'}] = \frac{hc}{i} (\gamma_{ijk'l'} - \gamma_{k'l'ij}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

follow immediately by means of (1, II) and (4, II).

They are deduced in § 2 by a method which is much simpler than the usual ones given until now. § 3 contains the usual metrical specialisation of the linking quantities and the proof that equations (6) are really equivalent with the well-known commutability-relations.

The deduction is based upon the fact, taken over from the metrical theory, that the $\gamma_{ik'}$ and $\gamma_{ijk'l'}$ are essentially *unsymmetrical*. Indeed, if (2, I) determines the *retarded* potentials (denoted by φ_i^R), determined by any given charges \mathfrak{S}^t , the *advanced* potentials φ_i^A are determined by

$$\varphi_i^A = \int \mathfrak{S}^{k'} \gamma_{k'i} d\Sigma' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Now in the case of stationary light-waves, enclosed in a chamber, the walls of which are perfect mirrors, $\mathfrak{S}^{k'}$ is zero in the interior of the chamber; the integrals therefore are extended over the (unknown) charges in the walls, which interact with the waves. Because φ_i^R and φ_i^A satisfy in the metrical theory the equations $\square \varphi_i^R = s_i$, $\square \varphi_i^A = s_i$ the differences

$$\varphi_i = \varphi_i^R - \varphi_i^A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

satisfy the equation $\square \varphi_i = 0$ and may therefore be considered as the potentials of the light-waves.

5) N. BOHR und L. ROSENFELD, Zur Frage der Messbarkeit der elektromagnetischen Feldgrößen, Kgl. Danske Vidensk. Selskap. Math. fys. Medd. **12**. 8 (1933).

6) V. FOCK, Zur Quantenelektrodynamik, Ph. ZS. der Sowjetunion **6** (1934) 425–469. Cf. also V. FOCK and B. PODOLSKY, ibidem **1** (1932) 801–817; P. A. M. DIRAC, V. FOCK and B. PODOLSKY, ibidem **2** (1932) 468–479.

7) As usual $[u, v]$ means $uv - vu$. The h we use is PLANCK's h divided by 2π . It is to be noted that $\gamma_{ij'} = \gamma_{ij'}(P, P')$ is a two-point quantity; in $\gamma_{j'i}$ not only the indices but also the world-points are interchanged: $\gamma_{j'i}(P', P)$.

8) Prof. E. CARTAN kindly drew my attention to his paper, Sur les variétés à connexion affine et la relativité généralisée, Ann. Ec. Norm. **41** (1924) where he already in 1924 made the remark, (Chapter V, N^o. 81) that MAXWELL's equations are independent of any kind of metric.

Though all equations of §§ 1, 2 are independent, not only of the choice of the system of coordinates, but also of *metrics*, I do not consider this independence as the most important *advantage* of the theory, but rather as a guiding and heuristic principle, though at the other hand the fact that also quantum-electro-dynamics appear to be independent of metric and the astonishingly simple and general form of relations (5) (6) might be considered as a rather strong argument for our point of view. The main advantage, to my view, however is the fact that equations (5) (6) and their deduction are *independent of the actual form of the $\gamma_{ik'}$* , which in the metrical theory is based on COULOMB's law. Hence a possible correction on COULOMB's law and therefore on the expressions (15) for $\gamma_{ik'}$ would *not* disturb equations (5), (6), supposed of course that the other fundaments of electromagnetism could be maintained⁹⁾. A further advantage of the theory might be the fact that the *differential* equations (1) play only a rather unimportant and formal role in our theory, whereas the relevant part of it is contained in the *integral* equations (2), (3)¹⁰⁾. Indeed, in a possible transition from the continuous field-theory to a discontinuum-theory of space-time, the integral-equations retain their meaning, as the integrals can easily be considered as mathematical abstractions and simplifications from sums over a very large but finite number of particles (just like in thermodynamics); the corresponding transition from differential-equations to equations with finite differences, however, is always rather artificial.

§ 2. The commutability-relations.

Just as an ordinary affinor h_{ij} can be split up into the sum of products of vectors $h_{ij} = \sum_h u_i v_j$, the two-point-quantity $\gamma_{ik'}$ can be split up in the following way:

$$\gamma_{ik'}(P, P') = \sum_r \varphi_i^r(P) \varphi_{k'}^r(P') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

The index r will run neither through a finite nor through an infinite discrete series of symbols, but through a (fourdimensional) manifold, which need not be specified here. The transvection over r means an integration (eventually combined with a summation). P and P' are two arbitrary world-points in space-time. As $\gamma_{ik'}$ is not symmetrical $\varphi_i^r(P)$ and $\varphi_{k'}^r(P')$ will be different (except eventually for special values of r).

⁹⁾ Cf. e.g. BORN's new theory which is a *metrical* theory, different from the classical one, but also reposing on the supposition of *local* dependence of F_{ij} on \mathfrak{G}^{ij} . Cf. M. BORN and L. INFELD, Foundations of the new field theory, Proc. Royal Soc. A **144** (1934) 425—451.

¹⁰⁾ The importance of integral-equations in quantum-dynamics was first pointed out by K. LANCZOS, Ueber eine feldmässige Darstellung der neuen Quantenmechanik, ZS. f. Ph. **35** (1926) 812—830.

Now if any field \mathfrak{S}^i is given, it determines by (2, I) the retarded potentials

$$\overset{R}{\varphi}_i = \underset{r}{c} \underset{r}{\varphi}_i, \quad \underset{r}{c} = \int \mathfrak{S}^{k'} \underset{r}{\varphi}_{k'} d\Sigma', \quad \dots \quad (10)$$

and the advanced potentials

$$\overset{A}{\varphi}_i = \underset{r}{\varphi}_i \underset{r}{c}, \quad \underset{r}{c} = \int \underset{r}{\varphi}_{k'} \mathfrak{S}^{k'} d\Sigma' \quad \dots \quad (11)$$

Passing to quantum-electrodynamics, we suppose the $\underset{r}{c}$ and the $\overset{r}{c}$ to be symbols for operators (e.g. matrices). It is natural to assume that the $\overset{r}{\varphi}_i$ and $\underset{r}{\varphi}_i$ which are characteristic functions of the nucleus $\gamma_{ik'}$ of the integral equation (2, I), are commutable between each other, as well as with the $\underset{r}{c}$ and $\overset{r}{c}$, and that the constants $\underset{r}{c}$, $\overset{r}{c}$ satisfy the relations

$$\left[\underset{s}{\overset{r}{c}}, \underset{s}{c} \right] = \frac{hc}{i} \underset{s}{\delta}^r, \quad \dots \quad (12)$$

where $\underset{s}{\delta}^r$ is the general KRONECKER-DIRAC-symbol ¹¹⁾, whereas the $\overset{r}{c}$ between each other, and the $\underset{r}{c}$ between each other are commutable.

Hence any two retarded potentials as well as any two advanced potentials are commutable; only a retarded and the corresponding advanced potential are non-commutable. This seems a very natural result, if we interpret our formulae in the following way: *The integration over r is a mathematical idealization of a summation over a very large but finite number of elementary fields, belonging to charges situated in the walls of the box or outside. To each "jump" belongs an ingoing and an outgoing field $\underset{r}{\varphi}_i$ and $\overset{r}{\varphi}_i$ respectively. The field in the box is a linear ¹²⁾ superposition of all these elementary fields, determined by (10), (11). The only cause of inaccuracy in the measurements of field-components lies in the fact that an in- and an outgoing field, belonging to one single "jump", are not commensurable. This is plausible, as a measurement of the ingoing field would disturb the jump and therefore the outgoing field. Finally we see from (9) that the quantity $\gamma_{ik'}$ which lies at the bottom of metric is determined by the elementary fields, though not as a mean value (as was predicted in I) but as a sum.*

¹¹⁾ P. JORDAN, Ueber eine neue Begründung der Quantenmechanik, I. ZS. f. Ph. **40** (1926), 809—839, II ibidem **44** (1927), 1—25.

¹²⁾ At least approximately, i.e. at a sufficiently large distance from the walls of the box.

If now the stationary waves are defined by (8) we find at once by substitution of (10, 11, 12):

$$\begin{aligned} \left[\varphi_i, \varphi_{k'} \right] &= \left[c_r^r \varphi_i - \varphi_i c_r^r, c_s^s \varphi_{k'} - \varphi_{k'} c_s^s \right] = - \left[\varphi_i c_r^r, c_s^s \varphi_{k'} \right] - \\ &- \left[c_r^r \varphi_i, \varphi_{k'} c_s^s \right] = - \left[c_r^r, c_s^s \right] \left(\varphi_i c_s^s \varphi_{k'} - \varphi_{k'} c_r^r \varphi_i \right) = \\ &= - \frac{hc}{i} \left(\varphi_i c_s^s \varphi_{k'} - \varphi_{k'} c_r^r \varphi_i \right) = \frac{hc}{i} (\gamma_{ik'} - \gamma_{k'i}), \end{aligned}$$

which is equation (5).

As the coordinates $\xi^h, \xi^{h'}$ of the world-points P, P' are independent variables, we find by differentiation with respect to ξ^j and alternation:

$$[F_{ij}, \varphi_{k'}] = \frac{hc}{i} (2 \partial_{[i} \gamma_{j]k'} - 2 \partial_{[i} \gamma_{|k'|j]}) \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

and by repeating this process with respect to $\xi^{i'}$:

$$[F_{ij}, F_{k'l}] = \frac{hc}{i} (4 \partial_{[i} \partial_{[k'} \gamma_{j]l']} - 4 \partial_{[k'} \partial_{[i} \gamma_{l']j}]) \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

i.e. equation (6).

§ 3. *Metrical specialisation.*

Taking

$$\gamma_{ij}^* = - \frac{1}{4\pi r} \delta(ct - ct' - r) g_{ij}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

where $\delta(x)$ is DIRAC's function, and splitting up (5) into space and time we get:

$$[A_x, A_{x'}]^* = [A_y, A_{y'}]^* = [A_z, A_{z'}]^* = -[\varphi, \varphi']^* = \frac{hc}{i} \cdot \Delta(P, P'), \quad (16)$$

all other combinations being commutable. Here

$$\Delta(P, P')^* = \frac{1}{4\pi r} \{ \delta(ct - ct' - r) - \delta(ct' - ct - r) \},$$

is the so-called relativistic delta-function. In the same way we get from (6) (or also from (16) by differentiation):

$$\left. \begin{aligned} [E_x, E_{x'}] &\stackrel{*}{=} -\frac{hc}{i} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} \right) \Delta(P, P') \\ [E_x, E_{y'}] &\stackrel{*}{=} -\frac{hc}{i} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y'} \Delta(P, P') \\ [B_x, B_{x'}] &\stackrel{*}{=} +\frac{hc}{i} \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y'} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z'} \right) \Delta(P, P') \\ [B_x, B_{y'}] &\stackrel{*}{=} -\frac{hc}{i} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y'} \Delta(P, P') \\ [E_x, B_{y'}] &\stackrel{*}{=} -\frac{hc}{i} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z'} \Delta(P, P') \\ [E_x, B_{x'}] &\stackrel{*}{=} 0. \end{aligned} \right\} \quad . \quad (17)$$

All other commutability-relations are obtained by permuting the coordinates and the two world-points.

The relations (17) are entirely equivalent with those which are usually given, with the only exception that usually $[B_x, B_{x'}]$ is taken to be equal to $[E_x, E_{x'}]$. Now it is easily seen that indeed the expressions for these commutators are equal, as we have

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x \partial x'} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial y'} - \frac{\partial^2}{\partial z \partial z'} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t \partial t'} \right) \Delta(P, P') \stackrel{*}{=} 0 \quad . \quad (18)$$

Hence we see that from the *metrical* standpoint the relations (17) are equivalent with the usual ones. From our point of view, however, (17) or rather (6) must be considered as the preferable form which only in the special case of COULOMB-potentials leads to $[E_x, E_{x'}] = [B_x, B_{x'}]$, etc.

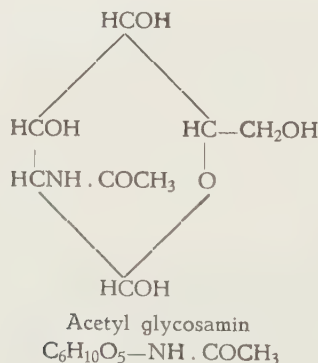
Botany. — *X Ray Investigations on the Molecular Structure of Chitin in Cell Walls. (Preliminary note.)* By A. N. J. HEYN. (Communicated by Prof. G. VAN ITERSON JR.).

(Communicated at the meeting of November 30, 1935).

Very few data exist on the molecular and crystal structure of chitin. Chitin of animal origin has been studied by GONELL (1926) and discussed by MEYER and MARK (1928). The first called author, however, was unable to determine the structure and unit cell dimensions, as he only obtained DEBIJE, SHERRER photographs, and in a few cases also fibre photographs.

The study of chitin, as present in plant cell walls, appeared to us to be of great interest both from the chemical and the botanical points of view.

From the chemical standpoint, it would be of interest to solve the problem as to whether the glucosamin residues by which the chitin molecule is built up are bound together by aldehyde glucosidal linkage or by the amino groups.



From the botanical point of view it was thought that such an investigation might throw light on the mechanism of growth, especially as the material chosen for investigation, the sporangiophore of the fungus *Phycomyces*, shows certain interesting and as yet unexplained phenomena during cell elongation. During elongation the young Sporangiophores rotate round the long axis. BURGEFF (1915) first described this phenomenon. OORT (1931) more fully studied it and called it spiral growth. No satisfactory explanation could be found, even after a careful scrutiny of the details in the subsequent work of OORT and ROELOFSEN (1932) on the optical properties of the wall and their data on the direction of protoplasmic streaming.

In this note, the results obtained from an investigation of the molecular structure of chitin as present in these walls will be briefly summarised, and the bearing of this observed structure upon the phenomenon of spiral growth pointed out. From the data it will be apparent that we have for the first time directly established that there probably exists, in this material, a relationship between the molecular structure of the cell wall and the mechanism of cell elongation.

By the use of special technique, it proved to be possible to obtain preparations of definite orientation of the lattice of chitin in all three directions, and these preparations were studied by X rays, the beam being passed along different directions in the wall as may be seen in Fig. 1. These directions of the wall proved to agree with the axes of the crystallographic unit cell of chitin. In Fig. 2 is shown the position of the lattice of chitin in the cell wall, found by experiment.

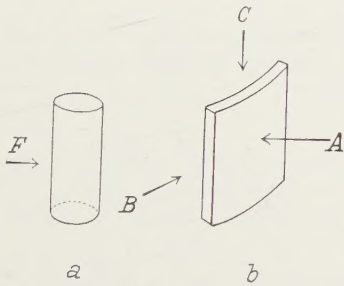


Fig. 1.

a. Part of the cylindrical sporangiophore, passed by x -ray beam in the direction F . The fibre diagram fig. 3 F , is obtained.

b. Part of the wall as passed by the x -ray beams.

A perpendicular to tangential plane of the wall; B perpendicular to radial plane; C perpendicular to transverse horizontal plane. The corresponding diagrams are represented in Fig. 3, A , B , C .

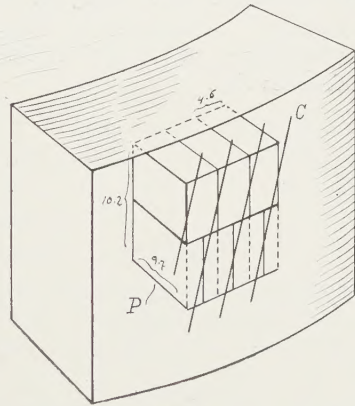


Fig. 2.

Position of lattice of chitin in the cell wall of the sporangiophore of *Phycomyces*. C Approximate, supposed direction of "cellulose chain" of chitin. P direction of "protein sidechain" of chitin.

The corresponding diagrams obtained are given in Fig. 3.

The identity periods and dimensions of the unit cell, as derived from these data are:

$$A = 9.7 \text{ \AA.u.} \quad B = 10.4 \text{ \AA.u.} \quad C = 4.6 \text{ \AA.u.}$$

From combined chemical and X ray data the position of molecules in the unit cell could be determined. The result is represented in Fig. 4. From

the figure it may be seen that, in chitin, cellulose chains linked up with protein chains are present. The cellulose chains lie along the b axis of the cell and the protein chains along the a axis.

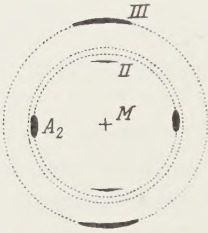


Fig. 3 A.

Diagram, obtained when passing the beam along A, fig. 1, pointing to the presence of radial planes of spacing 4.6 Å.u. (interferences A_2).

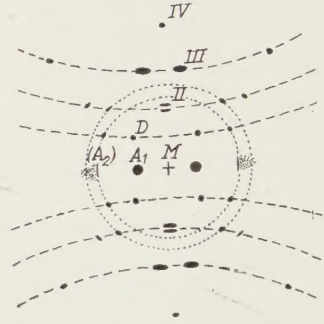


Fig. 3 B.

Diagram, obtained when passing the beam along B, fig. 1, pointing to the presence of tangential planes of spacing 9.7 Å.u. (interferences A_1).

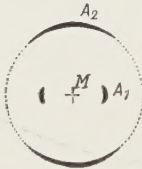


Fig. 3 C.

Diagram obtained, when passing the beam along C, fig. 1, pointing to the presence of both tangential and radial planes (interferences A_1 and A_2) at right angle with each other.

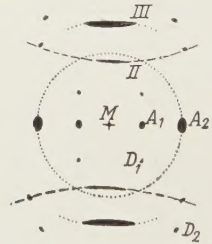


Fig. 3 F.

Fibre diagram when passing the beam along F, fig. 1, showing both planes of spacing 4.6 and 9.7 Å.u.

From all diagrams an identity period of 10.2 or 10.4 may be derived in the direction of the long axis. (Interferences I—IV.)

From these data it was predicted, and later confirmed by details of the X ray diagrams, that the b axis must probably form an angle of about $13\frac{1}{2}$ degrees with the c axis.

By these results the spiral growth shown by the sporangiophore of *Phycomyces* may be explained by accepting plastic slipping along crystal planes (001) parallel to the b and a axes. All the details of this phenomenon can be understood in the light of the molecular structure as it is established for the walls and interesting conclusions may be formed,

based on these data, as to the mechanism of cell elongation. The conclusions are in support of our theory that the first phase of surface enlargement of the wall and hence elongation consists in plastic stretching.

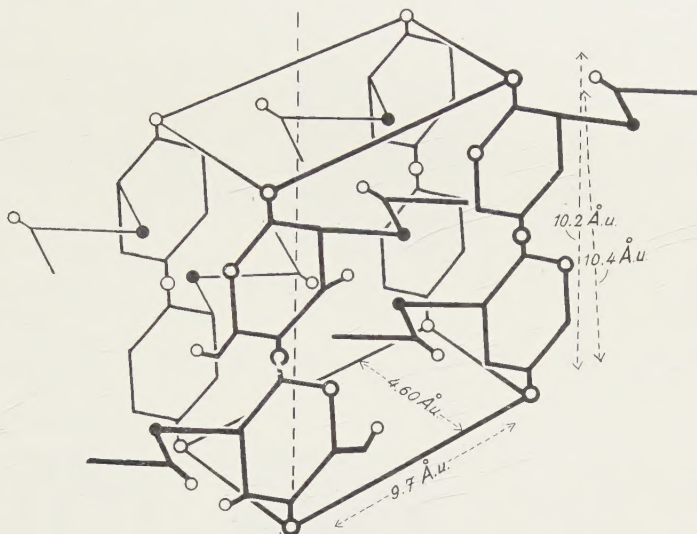


Fig. 4.

The probable position of molecules in the unit cell of chitin.
The carbon atoms are omitted.

- Oxygen atoms.
- Nitrogen atoms.

The b axis (10.4 Å.u.) forms an angle of about $13\frac{1}{2}$ degrees with the a axis. The cellulose chains of chitin lie along the b axis, the protein sidechains along the a axis. The c axis agrees with the side distance of protein chains (4.6 Å.u.)

A full account will shortly appear elsewhere¹⁾ as one of a series of papers on the mechanism of cell elongation.

REFERENCE

- BURGEFF, H. (1915). *Flora* **108**, 390.
 GONELL, H. W. (1926). *Z. phys. Chem.* **152**, 18.
 HEYN, A. N. J. (1931), *Rec. trav. bot. néerl.* **28**, 113; (1933) *Protoplasma* **19**, 78 (I); (1934) *ibid.* **21**, 299, (II); *Jahrb. f. wiss. Bot.* **79**, 753 (III).
 MEYER, K. H. und MARK, H. (1928). *Ber. d. d. Chem. Ges.* **61**, 593.
 OORT, A. J. P. (1931). *Proc. Kon. Akad. v. Wet. Amsterdam* **34**, 564.
 OORT, A. J. P. und ROELOFSEN, P. A. (1932). *Proc. Kon. Akad. v. Wet. Amsterdam* **35**, 898.

¹⁾ In the periodical "Protoplasma".

